

Grundzüge der Relativitätstheorie

Peter Breitfeld¹

Störck-Gymnasium
Bad Saulgau

10. Februar 2009

1. E-Mail: phbrf@t-online.de <http://www.pBreitfeld.de>

In diesem Skript sollen die Grundzüge der Relativitätstheorie dargelegt werden. Es besteht aus zwei Teilen: Der erste Teil befasst sich mit der speziellen, der zweite mit der allgemeinen Relativitätstheorie.

Während die spezielle Relativitätstheorie (SRT) mathematisch keine übermäßig hohen Ansprüche stellt, ist die Allgemeine Relativitätstheorie (ART) mathematisch so anspruchsvoll, dass in Einsteigerbüchern fast gänzlich auf die Mathematik verzichtet wird. In diesem Skript werde auch ich keine Tensoren benutzen, aber trotzdem etwas mehr Mathematik als sonst üblich einsetzen. Auch ohne Tensorkalkül kann man einiges in der ART mit „normaler“ Mathematik berechnen, allerdings muss man des öfteren Näherungen verwenden.

Inhaltsverzeichnis

- 1 *Die spezielle Relativitätstheorie* · 7
 - 1.1 Relativistische Kinematik · 7
 - 1.1.1 Geschichtliches · 7
 - 1.1.2 Die Lichtuhr und ihre Folgerungen · 8
 - 1.1.3 Umrechnungen zwischen Bezugssystemen · 11
 - 1.1.4 Addition der Geschwindigkeiten · 13
 - 1.1.5 Paradoxa · 14
 - 1.1.6 Minkowski-Raum · 15
 - 1.2 Relativistische Optik · 17
 - 1.2.1 Der Dopplerfaktor · 17
 - 1.2.2 Erscheinung bewegter Objekte · 19
 - 1.3 Aus der Elektrik · 19
 - 1.4 Relativistische Dynamik · 22
 - 1.4.1 Relativistische Masse · 22
 - 1.4.2 Energie · 24
 - 1.5 Gleichmäßig beschleunigte Systeme · 24
 - 1.5.1 Eigengeschwindigkeit und Eigenbeschleunigung · 24
 - 1.5.2 Weltlinie der beschleunigten Bewegung · 25
- 2 *Zur Allgemeinen Relativitätstheorie* · 28
 - 2.1 Das Äquivalenzprinzip · 28
 - 2.2 Maßstäbe und Uhren im Gravitationsfeld · 29
 - 2.2.1 Zeitabhängigkeit vom Gravitationsfeld · 29
 - 2.2.2 Schwarzschildradius und Zeitabhängigkeit · 30
 - 2.2.3 Gravitationsrotverschiebung · 31
 - 2.2.4 Maßstäbe im Gravitationsfeld · 31
 - 2.2.5 Lichtgeschwindigkeit im Gravitationsfeld · 31
 - 2.2.6 Die Bedeutung der Koordinaten · 34
 - 2.3 Die Schwarzschildmetrik · 36
 - 2.3.1 Bewegungsgleichung frei fallender Körper · 36
 - 2.3.2 Eigenschaften der Schwarzschildmetrik · 37
 - 2.3.3 Phänomene am Ereignishorizont · 41

Inhaltsverzeichnis

- 2.4 Gravitation und Geometrie · 42
 - 2.4.1 Flammisches Paraboloid · 42
 - 2.4.2 Die Krümmung von Flächen · 43
 - 2.4.3 Periheldrehung der Merkurbahn · 44

- A Vierervektoren · 45
 - A.1 Metrik des Minkowski-Raums · 45
 - A.2 Vierergeschwindigkeit und -Beschleunigung · 46
 - A.3 Viererimpuls · 47

- B Aufgaben und Lösungen · 49
 - B.1 Aufgaben · 49
 - B.2 Lösungen · 53

Abbildungsverzeichnis

- 1.1 ruhende Lichtuhr · 9
- 1.2 bewegte Lichtuhr · 9
- 1.3 Ein Weltdiagramm · 11
- 1.4 Weltdiagramm zum Uhrenparadoxon · 15
- 1.5 Bezugssysteme beim Uhrenparadoxon · 15
- 1.6 Zum Minkowski-Raum · 16
- 1.7 Erscheinungsbild eines bewegten Würfels · 19
- 1.8 Teilchen im elektromagnetischen Feld · 20
- 1.9 Weltlinie der gleichmäßig beschleunigten Bewegung · 26

- 2.1 Lichtablenkung im Schwerfeld · 32
- 2.2 Messung von Koordinaten des feldfreien Beobachters · 34
- 2.3 u- und w-Linien der SSM · 39
- 2.4 Zur Berechnung des Flammschen Paraboloids · 42
- 2.5 Flammsches Paraboloid · 42
- 2.6 Tangentialkegel ans Flammsche Paraboloid · 44
- 2.7 Der ausgewickelte Kegel · 44

1. Die spezielle Relativitätstheorie

1.1. Relativistische Kinematik

1.1.1. Geschichtliches

Die Relativitätstheorie behandelt das Problem, wie Ereignisse von verschiedenen Bezugssystemen aus zu interpretieren sind, und wie die physikalischen Gleichungen sich ändern, wenn man von einem Bezugssystem auf ein anderes wechselt.

In der SRT betrachtet man nur *Inertialsysteme (IS)*, das sind solche Systeme, in denen das Trägheitsgesetz gilt. Solche Systeme können folglich nicht beschleunigt sein. Dies bedeutet allerdings nicht, dass man keine beschleunigten Bewegungen in der SRT betrachten könnte, nur das Bezugssystem muss unbeschleunigt sein, bezüglich dieses Systems kann dann ein Körper beliebige Bewegungen ausführen.

In der Newtonschen Mechanik gilt folgender Grundsatz: Bewegt sich ein Körper mit der Geschwindigkeit u innerhalb etwa eines Zuges, der sich seinerseits mit der (konstanten) Geschwindigkeit v relativ zum Bahnsteig bewegt, dann hat dieser Körper relativ zum Bahnsteig die Geschwindigkeit $u + v$.

Ist nun x' die Ortskoordinate des Körpers relativ zum Zug, dann gilt:

$$x' = x_0 + ut$$

Vom Bahnsteig aus werde der Ort des Körpers über die Koordinate x gemessen, dann muss gelten

$$x = x' + vt \quad \text{bzw.} \quad x' = x - vt \quad (1.1)$$

Dabei wurde vorausgesetzt, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ sowohl $x = 0$ als auch $x' = 0$ gilt. Die Gl. (1.1) bezeichnet man als die *Galileo-Transformation*, mit ihr werden die Koordinaten der beiden Bezugssysteme (Zug und Bahnsteig) ineinander umgerechnet. In einem idealen Zug (der also nicht „rüttelt“) kann der Beobachter nicht entscheiden, ob er ruht und der Bahnsteig vorbeirauscht oder umgekehrt – zumindest nicht durch irgendwelche Experimente.

Das heißt, die Gesetze der Mechanik sehen in allen Inertialsystemen gleich aus. Das gilt nicht in beschleunigten Systemen, denn dort kommen ja die Trägheitskräfte hinzu.

Ein anderes Bild ergibt sich im Bereich der Optik bzw. der elektromagnetischen Wellen. Bis zur Aufstellung der SRT im Jahr 1905 durch Einstein, waren die Phy-

1. Die spezielle Relativitätstheorie

siker der Überzeugung, dass jede Welle eines Mediums bedürfe, in dem sie sich ausbreitet. Das Medium, in dem sich Lichtwellen ausbreiten, nannte man den Äther. Dieses Medium musste sehr schwer vorstellbare Eigenschaften haben: Da Lichtwellen Transversalwellen sind, muss ihr Medium ein fester Körper sein, andererseits aber so dünn, dass er keine mechanischen Wirkungen zeigt.

Dieser Äther sollte gegenüber der Gesamtheit der Fixsterne in Ruhe sein. Damit würde sich ein ruhendes Bezugssystem ergeben und man könnte alles bezüglich dieses Bezugssystem formulieren. So tauchte bald die Frage auf, mit welcher Geschwindigkeit sich etwa die Erde gegen den Äther bewegt. Dazu wurden viele Versuche durchgeführt, der bekannteste ist der Versuch von MICHELSON und MORLEY, die eine Verschiebung der Spektrallinien suchten, wenn Licht überlagert wird, das sich in Bewegungsrichtung der Erde bewegt mit Licht, das sich senkrecht zu dieser Richtung ausbreitet. Das unerwartete Ergebnis war, dass sich keinerlei Effekt zeigte, der von der Richtung des Lichts abhängt.

Bei der Aufstellung der SRT griff Einstein unter anderem auf diese Ergebnisse zurück und stellte die Theorie auf eine neue Grundlage, die er in zwei Postulaten formulierte:

Relativitätsprinzip: In allen Inertialsystemen haben die physikalischen Gesetze dieselbe Form. Es gibt also kein ausgezeichnetes Bezugssystem. Alle Inertialsysteme sind gleichberechtigt. (Dies gilt nicht nur für die Mechanik, sondern für die gesamte Physik)

Konstanz der Lichtgeschwindigkeit: Licht breitet sich im Vakuum aus. Die Lichtgeschwindigkeit hat in allen Inertialsystemen denselben Wert $c \approx 300\,000\text{ km/s}$. Kein Signal kann mit einer größeren Geschwindigkeit übermittelt werden.

Insbesondere das Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit widerspricht dem „gesunden Menschenverstand“. Es bedeutet, angewandt auf das Beispiel des Zugs von oben, dass ein Lichtblitz, der im Zug ausgelöst wird, und dessen Geschwindigkeit vom Zug aus gemessen c ist, *auch* vom Bahnsteig aus gemessen dieselbe Geschwindigkeit c hat und *nicht* die Geschwindigkeit $c + v$, wie das für Körper nach der klassischen Mechanik gilt.

Anders ausgedrückt, egal in welche Richtung und mit welcher Geschwindigkeit sich ein Beobachter bewegt, immer misst er für die Geschwindigkeit eines vorbeisausehenden Lichtblitzes die Geschwindigkeit c .

Damit kippt nun die stillschweigende Voraussetzung, die wir bei der Galileo-transformation gemacht hatten, dass nämlich die Beobachter im Zug und auf dem Bahnsteig beide dieselbe Zeit messen.

1.1.2. Die Lichtuhr und ihre Folgerungen

In der Relativitätstheorie betrachtet man *Ereignisse*. Diese werden beschrieben durch die Ortskoordinaten (x, y, z) und den Zeitpunkt t an dem sie stattfinden.

1.1.2.1. Gleichzeitigkeit

Um zwei Uhren zu synchronisieren, kann man von der einen Uhr ein Funksignal (oder einen „gleichschnellen“ Lichtblitz) aussenden. Der Empfänger muss die Laufzeit des Signals zur übermittelten Zeit addieren und kann dann seine Uhr einstellen.

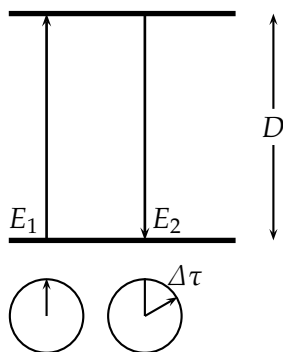


ABB. 1.1 ruhende Lichtuhr

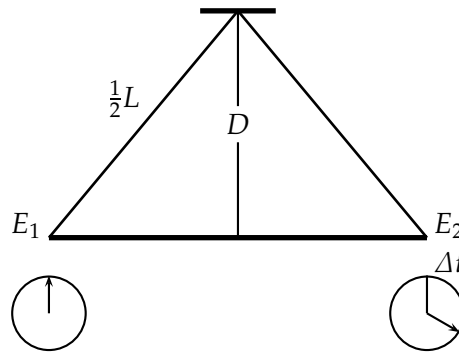


ABB. 1.2 bewegte Lichtuhr

In Abb. 1.1 betrachten wir die Lichtuhr. Eine Zeitspanne Δt wird dadurch gemessen, dass ein Lichtblitz ausgesandt wird (Ereignis E_1), der auf einen Spiegel fällt und zum Ausgangspunkt zurückreflektiert wird (Ereignis E_2).

Zeitdilatation: Eva sitze im Zug, der sich mit v relativ zum Bahnsteig bewegt, und betätigt dort ihre Lichtuhr. Für die Zeit zwischen den Ereignissen E_1 und E_2 misst sie:

$$\Delta\tau = \frac{2D}{c}$$

Für Eva finden E_1 und E_2 am gleichen Ort statt, und $\Delta\tau$ kann mit einer einzigen an eben diesem Ort aufgestellten Uhr gemessen werden.

Notiz 1.1 Ein Zeitintervall $\Delta\tau$, das mit einer einzigen, ruhenden Uhr gemessen werden kann, heißt Eigenzeitintervall.

Für Adam, der auf dem Bahnsteig steht, finden die Ereignisse E_1 und E_2 an verschiedenen Orten statt, die den Abstand $v\Delta t$ haben. Da in seinem IS das Licht ebenfalls die Geschwindigkeit c hat (c ist ja in allen Bezugssystemen gleich groß), benötigt der Lichtblitz eine längere Zeit, da er die Strecke

$$L = \sqrt{(v\Delta t)^2 + (2D)^2} = \sqrt{(v\Delta t)^2 + (c\Delta\tau)^2}$$

durchlaufen muss. (Vgl. Abb. 1.2). Die von Adam gemessene Zeitspanne ist folglich

$$\Delta t = \frac{L}{c}$$

1. Die spezielle Relativitätstheorie

Eliminiert man L aus den letzten beiden Gleichungen, dann folgt:

$$\Delta t = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = k \cdot \Delta \tau \quad \text{mit} \quad k = k(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (1.2)$$

Den Faktor k bezeichnet man als den LORENTZ-Faktor. Die Gleichung (1.2) beschreibt die Zeitdilatation. Man sagt: „bewegte Uhren gehen nach“.

Etwas genauer formuliert heißt das:

Notiz 1.2 *Vergeht in einem IS die Eigenzeit $\Delta \tau$ zwischen zwei Ereignissen, dann vergeht in jedem anderen, gegen dieses IS mit Geschwindigkeit v bewegten IS die längere Zeit $\Delta t = k \cdot \Delta \tau$.*

Man beachte, dass Adam keine Eigenzeit misst, denn er muss mit zwei an verschiedenen Orten aufgestellten Uhren das Zeitintervall messen.

Da keine Geschwindigkeit größer als c sein kann, gilt für den Lorentzfaktor immer $k \geq 1$. Einige Werte sind:

Tab. 1.1 Einige Werte des Lorentzfaktors

v/c	0,1	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	0,866	0,9	0,99	0,999
k	1,005	1,048	1,091	1,155	5/4	5/3	2	2,294	7,089	22,37

Längenkontraktion: Will man die Länge eines ruhenden Objekts messen, so kann dies in einfacher Weise mit einem Maßband geschehen. Bewegt sich jedoch das Objekt, so muss man den Ort der beiden Enden zur selben Zeit feststellen. Die Länge ergibt sich dann als Differenz der Ortskoordinaten.

Eva sitzt wieder in ihrem Zug, der sich mit v gegenüber dem Bahnsteig bewegt. Adam, der auf dem Bahnsteig steht, möchte wie Eva die Länge des Bahnsteiges messen. Adam misst sie mit einem Maßband aus, für ihn ist die gemessene Länge eine *Eigenlänge* L_0 , da der Bahnsteig für ihn ruht.

Während der Zug vorbeifährt, misst Adam die Zeit $\Delta t = L_0/v$, die das vordere Ende des Zugs zum Passieren des Bahnsteigs benötigt. Diese Zeitspanne ist keine Eigenzeit, denn die Ereignisse $E_1 =$ „Bahsteiganfang erreicht“ und $E_2 =$ „Bahnsteigende erreicht“ finden an verschiedenen Orten statt.

Für die vorn im Zug sitzende Eva bewegt sich der Bahnsteig. Für sie finden die Ereignisse E_1 und E_2 am gleichen Ort statt. Sie misst also eine Eigenzeit $\Delta \tau = L/v$. Daraus folgt mit Gleichung (1.2):

Notiz 1.3 *Längenkontraktion*

$$\frac{L}{L_0} = \frac{v \Delta \tau}{v \Delta t} = \frac{1}{k} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{1}{k} \cdot L_0 \quad (1.3)$$

Dies ist die Längenkontraktion. Misst ein Beobachter in seinem IS für eine ruhende Strecke die Eigenlänge L_0 , dann messen alle gegen ihn bewegten Beobachter für diese Strecke einen kürzeren Wert L .

1.1.3. Umrechnungen zwischen Bezugssystemen

1.1.3.1. Weltdiagramme

In Weltdiagrammen stellt man „s-t-Diagramme“ für bewegte Systeme dar. Die Weltlinie eines Objekts ist einfach das gewohnte s-t-Diagramm, nur werden die Achsen in der SRT üblicherweise vertauscht, also die t -Achse nach oben. (Vgl. Abb. 1.3)

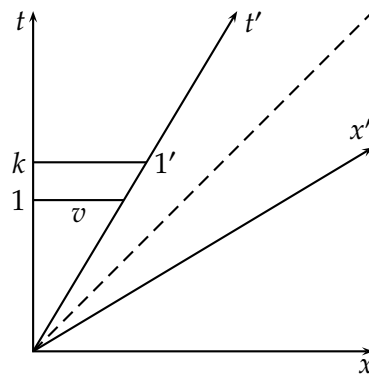


ABB. 1.3 Ein Weltdiagramm

Stellt man ein Ereignis als Punkt in einem x - t -Koordinatensystem dar, mit horizontaler Achse als x -Achse und vertikaler Achse als t -Achse, und wählt man als Längeneinheit Lichtsekunden (Ls) und als Zeiteinheit Sekunden, dann ist die Weltlinie eines Lichtblitzes die erste Winkelhalbierende, denn c hat in diesen Einheiten den Wert 1. Ein im IS S ruhendes Objekt am Ort x hat dann als Weltlinie eine Parallele zur t -Achse durch $(x|0)$. Im mit Geschwindigkeit v gegen S bewegten IS S' ruht dieses Objekt nicht. Ein in S' ruhendes Objekt hat vielmehr eine geneigte Gerade als Weltlinie. Die t' -Achse des Koordinatensystems von S' muss zu dieser Geraden parallel sein.

Im Weltdiagramm von Abb. 1.3 ist also die t' -Achse die Weltlinie des Koordinatenursprungs des ISs S' bezüglich des ISs S .

Da in allen ISen die Weltlinie eines Lichtblitzes die erste Winkelhalbierende sein muss (bei unserer Wahl der Einheiten!), muss die x' -Achse ebenfalls eine geneigte Gerade sein, und zwar das Spiegelbild von t' an der ersten Winkelhalbierenden.

Das Ziel ist nun, ein Ereignis zwischen den beiden Koordinatensystemen umzurechnen. Dies wird auf die Lorentztransformation führen.

1.1.3.2. Lorentztransformation

Die Lorentztransformation kann man nicht „herleiten“, denn sie ist die Quintessenz der SRT, man kann sie nur plausibel machen.

1. Die spezielle Relativitätstheorie

Wir nehmen an, dass der Zusammenhang zwischen den Koordinaten linear ist, dass also für die Ortskoordinate gilt:

$$x' = a(x - vt)$$

Da alle Bezugssysteme gleichberechtigt sind, muss umgekehrt gelten

$$x = a(x' + vt')$$

mit demselben a . Eines weiß man schon sicher: Lichtblitze bewegen sich in beiden ISe gleich, für ihre Weltlinien gilt $x = ct$ und $x' = ct'$. Setzt man nun die Werte für die Lichtblitze in den Ansatz ein, dann ergibt sich:

$$ct' = a(ct - vt) = at(c - v) \quad \text{und} \quad ct = a(ct' + vt') = at'(c + v).$$

Multiplikation dieser beiden Gleichungen ergibt:

$$c^2 tt' = a^2 tt' (c - v)(c + v) = a^2 tt' (c^2 - v^2) \Rightarrow a^2 = \frac{1}{1 - v^2/c^2} = k^2$$

Da im Weltdiagramm t und x völlig symmetrisch sind, müssen die Gleichungen für t die folgende Form haben (man muss nur x und ct vertauschen):

$$ct' = k(ct - vx/c) \quad \Rightarrow \quad t' = k(t - vx/c^2)$$

Damit haben wir die **Lorentztransformation** gefunden.

Notiz 1.4 Hat ein Ereignis im IS S die Koordinaten $(x|t)$, so hat es im IS S' , das sich mit v gegen S bewegt die Koordinaten $(x'|t')$. Diese Koordinaten rechnet man mit den folgenden Formeln um:

$$x' = k(x - vt) \qquad x = k(x' + vt') \qquad (1.4)$$

$$t' = k(t - vx/c^2) \qquad t = k(t' + vx'/c^2) \qquad (1.5)$$

Entsprechende Gleichungen gelten damit auch für die Koordinatenänderungen Δx , Δt , $\Delta x'$ und $\Delta t'$.

Noch eine Bemerkung: In diesem Skript betrachten wir (fast) nur Bewegungen in x -Richtung und setzen voraus, dass die x -Achse und die x' -Achse der beiden ISe parallel liegen. Dann bleiben die beiden anderen Ortskoordinaten y und z beim Wechsel in ein anderes Bezugssystem unverändert.

Andere Begründung der LT: Wird im System S' die Koordinate x' gemessen, so erscheint diese wegen der Längenkontraktion vom System S aus verkürzt. Deshalb gilt:

$$x = \frac{x'}{k} + vt \quad \Rightarrow \quad x' = k(x - vt) \quad \Rightarrow \quad x = k(x' + vt')$$

letzteres wegen des Relativitätsprinzips. Setzt man die zweite Gleichung in die dritte ein, dann folgt $t' = k(t - vx)$.

Einheiten im Weltdiagramm: Der Punkt 1' im Diagramm von Abb. 1.3 hat in S' die Koordinaten $(0|1)$, also $x' = 0$ und $t' = 1$. Damit hat er im IS S die Koordinaten $x = k(0 + v) = kv$ und $t = k(1 + 0) = k$. Damit kann man leicht im Weltdiagramm die Einheiten im IS S' eintragen.

Zeitdilatation und Längenkontraktion: Aus der Lorentztransformation kann man wieder die Gleichungen für Längenkontraktion und Zeitdilatation herleiten:

Finden in S' zwei Ereignisse am selben Ort statt ($\Delta x' = 0$), aber zu verschiedenen Zeiten ($\Delta t' \neq 0$), dann gilt $\Delta t = k(\Delta t' + 0) = k\Delta t'$. Dabei ist $\Delta t'$ eine Eigenzeit, da sie mit einer Uhr am selben Ort gemessen wird. Damit hat man wieder die Formel (1.2) für die Zeitdilatation.

Wenn ein Maßstab in S' ruht, dann ist $L_0 = \Delta x'$ die Eigenlänge des Maßstabs in S' . In S bewegt sich der Maßstab, der Ort seiner Endpunkte muss gleichzeitig bestimmt werden, also muss $\Delta t = 0$ gelten. Damit folgt:

$$\Delta x' = k(\Delta x - v\Delta t) \Rightarrow L_0 = k(\Delta x - v \cdot 0) = k\Delta x = k \cdot L \Rightarrow L = \frac{1}{k}L_0$$

und das war die Beziehung (1.3) der Längenkontraktion.

1.1.4. Addition der Geschwindigkeiten

In der Einführung hatten wir schon gesehen, dass die einfache Vorstellung von der Addition der Geschwindigkeiten nicht richtig sein kann, wenn man Licht verwendet.

Wir betrachten nochmals das Standardbeispiel: Vom fahrenden Zug aus wird ein Geschoss mit der Geschwindigkeit u' abgeschossen. Der Zug habe relativ zum Bahnsteig die Geschwindigkeit v . Welche Geschwindigkeit u hat das Geschoss dann relativ zum Bahnsteig?

In der klassischen Physik ist die Antwort einfach: $u = u' + v$. Wir wissen aber inzwischen, dass Lichtblitze, die vom Zug aus mit c „abgeschossen“ werden, auch für den Beobachter auf dem Bahnsteig die Geschwindigkeit c haben, denn die Lichtgeschwindigkeit ist für alle Bezugssysteme gleich. Weiter kann ein Geschoss mit $u' = 0,7c$, das von einem Zug mit $v = 0,5c$ abgeschossen wird, nicht die Geschwindigkeit $u = 1,2c$ haben, denn das wäre Überlichtgeschwindigkeit. Es muss also für die Geschwindigkeit u eine andere Formel gefunden werden.

Der Zug ruhe in seinem IS S' , der Bahnsteig ruhe in S . Nach der Lorentztransformation gilt nun:

$$\Delta x = k(\Delta x' + v\Delta t') \quad \text{und} \quad \Delta t = k(\Delta t' + v\Delta x'/c^2)$$

Auf dem Bahnsteig wird also die Geschwindigkeit

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x' + v\Delta t'}{\Delta t' + v\Delta x'/c^2} = \frac{\Delta x'/\Delta t' + v}{1 + v(\Delta x'/\Delta t')/c^2}$$

1. Die spezielle Relativitätstheorie

gemessen. Nun ist aber $u = \Delta x/\Delta t$ die Geschwindigkeit bezüglich S und $u' = \Delta x'/\Delta t'$ die Geschwindigkeit bezüglich S' . Daraus folgt nun das *Additionstheorem der Geschwindigkeiten*:

Notiz 1.5 *Bewegt sich ein Körper mit u' relativ zu S' und bewegt sich S' mit v relativ zu S , dann bewegt sich der Körper mit u relativ zu S , wobei gilt:*

$$u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2} \equiv u' \oplus v \quad (1.6)$$

Wie es sich gehört geht diese Formel in die Gleichung $u = u' + v$ über, wenn u' und v klein gegen c sind, denn dann wird der Nenner praktisch 1. Sogar bei so großen Geschwindigkeit wie $u' = v = 30 \text{ km/s}$, die auf der Erde von keinem makroskopischen Körper erreicht werden können, hat man für den Nenner den Wert 1,00000001.

1.1.5. Paradoxa

1.1.5.1. Das Uhrenparadoxon

Das Uhrenparadoxon, auch als Zwillingparadoxon bekannt, ist wohl das berühmteste Paradoxon der SRT. Es sagt aus, dass ein Reisender, der sich mit einem schnellen Raumschiff von der Erde entfernt und dann wieder zurückfliegt, bei der Ankunft jünger ist als sein auf der Erde zurückgebliebener Zwilling. Dass hier alles seine Richtigkeit hat, soll nun gezeigt werden.

Im folgenden Beispiel fliege B mit einem Raumschiff ($v = 0,5c$) von der Erde aus zu einem $s = 10 \text{ LJ}$ entfernten Stern. Dort wendet er und fliegt mit derselben Geschwindigkeit zurück. Von A, der auf der Erde ruht, aus gesehen kommt B also nach 40 Jahren zurück. Für B ist aber auf Grund der Längenkontraktion der Flugweg nur $20/k = 20/1.155 = 17,32 \text{ LJ}$ lang. Daher benötigt er die Zeit $17,32/0,5 \approx 35 \text{ a}$. Derselbe Wert ergibt sich, wenn wir die Zeit mittels $40/k \approx 35$ berechnen. Das Welt diagramm der Fahrt des Raumschiffs ist in Abb. 1.4 gezeichnet.

Nun könnte man argumentieren, dass B ruht und dadurch A sich bewegt, also A jünger sein müsste. Aber genau da liegt der Denkfehler, denn B wechselt das Bezugssystem. Auf dem Hinflug ruht B im IS S' , auf dem Rückflug im IS S'' (vgl. Abb. 1.5). An der Stelle des Wendens muss B beschleunigen, befindet sich dann nicht mehr in einem Inertialsystem. Dies ist aber nicht der entscheidende Punkt, denn theoretisch kann man die Beschleunigungsphase beliebig kurz machen, etwa indem man den Raumfahrer einfach plötzlich „umsteigen“ ließe. Dieser Wechsel des Bezugssystems bewirkt nun den Zeitsprung.

Für B ist das Ereignis W am gleichen Ort wie die Ereignisse S und R , je nachdem ob er noch auf dem Hinflug oder schon auf dem Rückflug ist. Entsprechend sind die Ereignisse E_1 und E_2 für ihn gleichzeitig zu W . Damit macht A von B aus gesehen im Augenblick des Wendens einen Zeitsprung.

Aus diesen Überlegungen kann man folgende allgemein gültige Regel schließen:

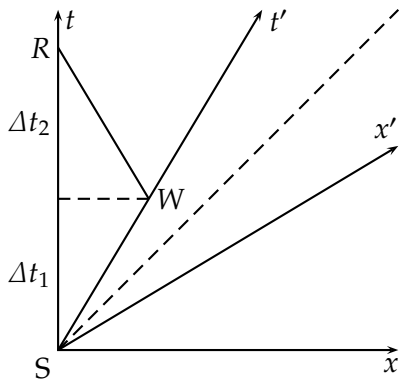


ABB. 1.4 Weltdiagramm zum Uhrenparadoxon

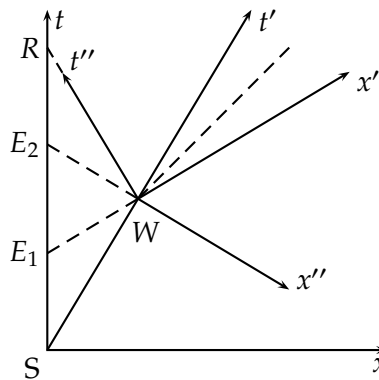


ABB. 1.5 Bezugssysteme beim Uhrenparadoxon

Notiz 1.6 Unter allen Weltlinien, die durch zwei Ereignisse P und Q gehen, besitzt die gerade Weltlinie die größte Eigenzeit (= Zeit, die der Beobachter für die Dauer seiner Bewegung auf seiner ruhenden Uhr misst.)

1.1.5.2. Garagenparadoxon

Auch mit der Längenkontraktion kann man Paradoxa konstruieren.

In eine Garage von 10 m Länge soll ein 20 m langer Stab hineingebracht werden. Dazu muss man den Stab nur mit $0,87c$ bewegen, dann verkürzt er sich von der Garage aus gesehen auf 10 m, denn bei dieser Geschwindigkeit ist $k = 2$; er passt also nun gerade in die Garage hinein.

Vom Stab aus gesehen bewegt sich aber die Garage. Immer noch ist $k = 2$, also ist für den Stab die Garage nur 5 m lang. Daraus müsste folgen, dass der Stab keine Chance hätte, in die Garage zu passen.

Nun breiten sich aber Signale maximal mit Lichtgeschwindigkeit aus. Wenn also die Rückseite der heranrutschenden Garage gerade die Spitze des Stabs berührt hat, so kann das Stabende davon frühestens etwas erfahren nach der Zeit $t = 20 \text{ m}/c$. In dieser Zeit hat sich aber die Garage um das Stück $0,87c \cdot 20 \text{ m}/c = 17,4 \text{ m}$ vorbewegt. Das hintere Ende des Stabs befindet sich dann schon 2,6 m innerhalb der Garage. (!!)

1.1.6. Minkowski-Raum

Im „normalen“ dreidimensionalen Raum ist der Abstand zweier Punkte unabhängig vom Koordinatensystem, wenn man vom System (x, y, z) zu einem gedrehten oder verschobenen Koordinatensystem (x', y', z') übergeht, d. h. es gilt:

$$\Delta r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2$$

1. Die spezielle Relativitätstheorie

Hier betrachten wir in der SRT nur Bewegungen des Koordinatensystems längs der x -Achse, somit ist $\Delta y' = \Delta y$ und $\Delta z' = \Delta z$, wohingegen sich $\Delta x'$ und $\Delta t'$ aus der Lorentztransformation ergeben.

Betrachte nun den Ausdruck (in dem wir der Einfachheit halber $c = 1$ setzen, d. h. man rechnet mit Lichtsekunden als Streckeneinheit. Dies ist allgemeine Sitte in der Relativitätstheorie, die „richtigen“ Ausdrücke bekommt man dann durch Einfügen passender Potenzen von c so, dass die Einheiten richtig werden.)

$$\begin{aligned} t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 &= k^2(t - vx)^2 - k^2(x - vt)^2 - y^2 - z^2 \\ &= k^2(t^2 - 2vtx + v^2x^2 - x^2 + 2vtx - v^2t^2) - y^2 - z^2 \\ &= k^2(t^2(1 - v^2) - x^2(1 - v^2)) - y^2 - z^2 \\ &= t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = t^2 - r^2 \end{aligned}$$

Somit ist der Ausdruck

$$\Delta s^2 = \Delta t^2 - \Delta r^2 \quad (1.7)$$

unabhängig vom Bezugssystem. Er heißt *Weltabstandsquadrat*. In der SRT spielt er dieselbe Rolle wie der normale Abstand in der gewöhnlichen Geometrie.

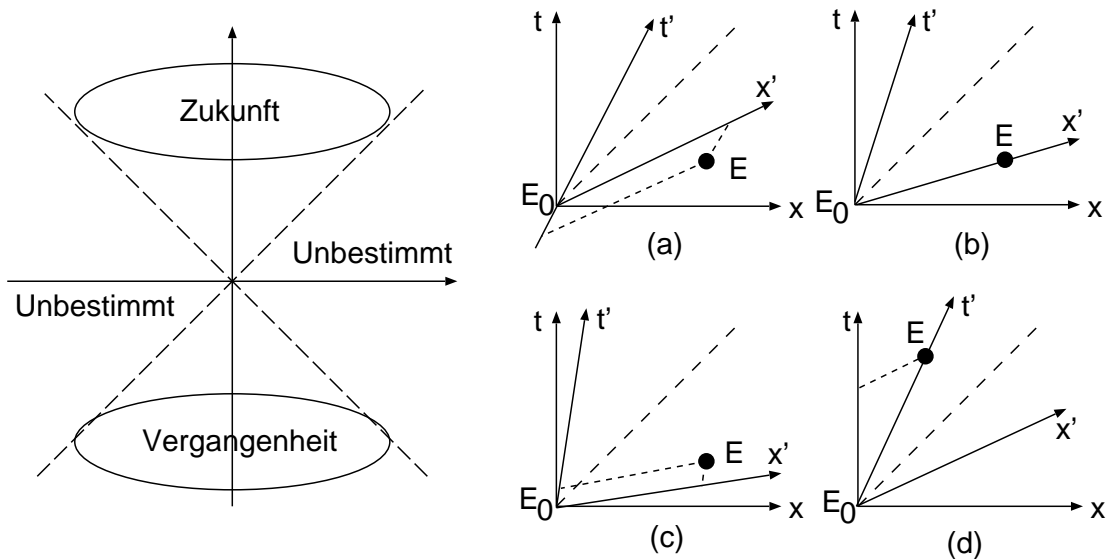


ABB. 1.6 Zum Minkowski-Raum

Eigenschaften des Weltabstandsquadrats:

für die Ereignisse $E_0(0|0|0|0)$ und $E(t|x|y|z)$ (überall $c = 1$ gesetzt) (vgl. Abb. 1.6):

- Für einen Lichtblitz ist $\Delta s^2 = 0$, denn es ist $c = 1 = \frac{\Delta r}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \Delta r$. Alle von E_0 ausgehenden oder bei E_0 eintreffenden Lichtblitze bilden den *Lichtkegel*.

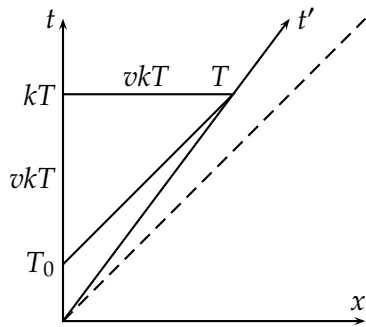
- Jedes Ereignis innerhalb des Zukunftslichtkegels liegt für *jeden* Beobachter zeitlich später als E_0 . Der Zukunftslichtkegel ist durch $|t| > |r| \wedge t > 0$ gekennzeichnet, also durch $t^2 > r^2 \Rightarrow t^2 - r^2 > 0$
- Außerhalb des Zukunfts- bzw. Vergangenheitskegels kann man immer ein BezugsIS finden für das ein Ereignis E früher, später oder gleichzeitig zu E_0 liegt. In Abb. 1.6 sind in den Diagrammen die Ereignisse E von S aus immer zur selben Zeit und am gleichen Ort eingetragen, aber in (a) ist für S' E früher als E_0 in (b) gleichzeitig zu E_0 und in (c) später als E_0 .
- Wegen der Symmetrie ist also innerhalb des Lichtkegels Zukunft und Vergangenheit eindeutig festgelegt, außerhalb des Lichtkegels vorn und hinten, während innerhalb des Lichtkegels vorn und hinten und außerhalb Vergangenheit und Zukunft vom IS abhängt.
- Innerhalb des Lichtkegels gilt also $\Delta s^2 > 0$ (*zeitartig*), außerhalb $\Delta s^2 < 0$ (*raumartig*) und auf dem Lichtkegel $\Delta s^2 = 0$ (*lichtartig*).
- Betrachtet man ein zu E_0 zeitartiges Ereignis E (vgl. Abb. 1.6(d)) dann gibt es ein BezugsIS S' , in dem die t' -Achse durch E geht. In diesem IS sind E und E_0 am selben Ort, somit ist der Abstand auf der t' -Achse gleich der Zeitspanne zwischen E und E_0 gemessen am selben Ort, also eine Eigenzeit. Deshalb stellt hier $\Delta s^2 = \Delta t'^2$ (es ist ja $\Delta r = 0$) das Quadrat der Eigenzeit für den Beobachter dar, für den E_0 und E am selben Ort sind.
- Analog ist dann $-\Delta s^2$ für zwei raumartige Ereignisse (vgl. Abb. 1.6(b)) der räumliche Abstand gemessen in einem System, in dem E und E_0 gleichzeitig sind.

1.2. Relativistische Optik

1.2.1. Der Dopplereffektor

In der klassischen Wellentheorie erfolgt der Dopplereffektor durch Bewegung von Sender und/oder Empfänger. Bei Licht entfällt diese Unterscheidung, da es kein Medium gibt, gegen das sich Sender oder Empfänger bewegen können, sondern nur die relative Bewegung der beiden gegeneinander.

1. Die spezielle Relativitätstheorie



In nebenstehendem Diagramm werde zur Zeit $t = T_0$ vom IS S am Ort $x = 0$ ein Lichtblitz ausgesandt. Vom IS S' wird dieser Lichtblitz zur Zeit $t' = T$ am Ort $x' = 0$ empfangen. Seine Koordinaten sind also im IS S (Lorentztransformation): $t = k(t' + vx'/c^2) = kT$ und $x = k(x' + vt') = kvT$. Da T_0T ja die Weltlinie eines Lichtblitzes ist, ist sie 45° geneigt und bildet die Basis eines rechtwinklig gleichschenkligen Dreiecks mit Spitze beim Zeitpunkt kT .

In zeitlichen Abständen von T_0 von S ausgesandte Lichtblitze werden also in S' jeweils im Abstand T empfangen.

Das Verhältnis

$$D = \frac{T}{T_0} = \frac{T}{kT - vkT} = \frac{1}{k(1 - v)} = \frac{\sqrt{1 - v^2}}{1 - v} = \sqrt{\frac{1 + v}{1 - v}} \quad (1.8)$$

bezeichnet man als den *Dopplerfaktor*. Wieder wurde $c = 1$ gesetzt. Würde man mit je mit „unnatürlichen“ Einheiten rechnen wollen, müsste man alle v durch v/c ersetzen.

Man beachte, dass die Zeitintervalle jeweils in der Zeit des registrierenden ISS (jeweilige „Bordzeit“) anzugeben sind, also wird T_0 in S -Zeit und T in S' -Zeit gemessen.

In dieser Herleitung hat sich S' von S entfernt. Bei Annäherung muss nur v durch $-v$ ersetzt, also der Kehrwert des D von Gl. (1.8) genommen werden. Damit ist $D > 1$ für Entfernung der ISe und $D < 1$ bei Annäherung.

Man kann Gleichung (1.8) nach v auflösen, dann erhält man:

$$D^2(1 - v) = 1 + v \Rightarrow D^2 - 1 = v(D^2 + 1) \quad \Rightarrow \quad v = \frac{D^2 - 1}{D^2 + 1} \quad (1.9)$$

Ist $v \ll c = 1$, dann kann man Gl. (1.8) nähern:

$$\frac{T}{T_0} = \frac{f_0}{f} = D = (1 + v)^{1/2}(1 - v)^{-1/2} \approx \left(1 + \frac{1}{2}v\right)^2 \approx 1 + v \Rightarrow f = \frac{f_0}{1 + v}$$

was auf die bekannte klassische Formel für den Dopplereffekt führt, wenn $f = 1/T$ die Frequenz der Welle ist.

Der Dopplerfaktor ist in seiner Anwendung nicht nur auf die Erscheinung des Dopplereffekts beschränkt, sondern kann gut für die Behandlung von Problemen verwendet werden, bei denen es um das Eintreffen von Signalen geht.

In Verbindung mit dem Additionstheorem (Gleichung (1.6)) entsteht die schöne Beziehung:

$$D(u \oplus v) = D(u) \cdot D(v) \quad (1.10)$$

denn

$$D(u)^2 D(v)^2 = \frac{1+u}{1-u} \cdot \frac{1+v}{1-v} = \frac{1+u+v+uv}{1-u-v+uv}$$

und

$$D(u \oplus v)^2 = \frac{1 + \frac{u+v}{1+uv}}{1 - \frac{u+v}{1-v}} = \frac{1+u+v+uv}{1-u-v+uv}$$

Radarmethode: Sendet man von S aus im Abstand T_0 zwei Signale ab, die von S' reflektiert werden, dann treffen diese im Abstand $T = DT_0$ in S' ein. Die reflektierten Signale treffen dann in S im Abstand $DT = D^2 T_0$ wieder ein.

1.2.2. Erscheinung bewegter Objekte

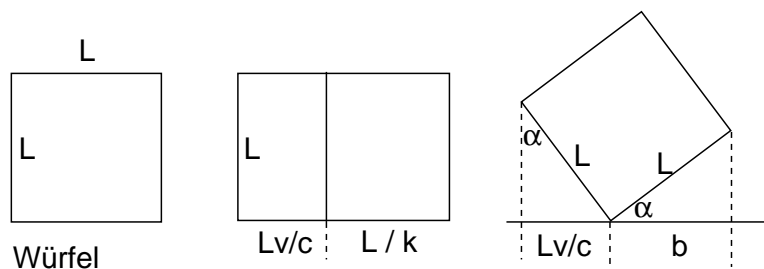


ABB. 1.7 Erscheinungsbild eines bewegten Würfels

Ein Würfel mit der Kantenlänge L bewege sich mit der Geschwindigkeit v in größerer Entfernung parallel zur x -Achse. In Abb. 1.7 ist diese Situation für einen Würfel mit $v/c = 0,6$ also $k = 1.25$ gezeichnet.

Für die Kanten in Bewegungsrichtung misst man die Länge $L' = L/k$. Die Lichtsignale, die von den hinteren Ecken des Würfels stammen, müssen früher ausgesandt werden als die von den vorderen Ecken, um gleichzeitig auf das Auge zu treffen. Diese Zeit ist $\Delta t = L/c$. Hier tritt keine Längenschrumpfung auf, da die Lichtsignale ja nicht in Bewegungsrichtung ausgesandt werden. Zu diesem früheren Zeitpunkt waren die Ecken aber noch um die Strecke $\Delta x = v\Delta t = vL/c$ in x -Richtung zurück. Man sieht also das mittlere Bild der Abb. 1.7. Dasselbe Bild würde man sehen, wenn man einen Würfel betrachtet, der um den Winkel α gedreht ist, wobei $\sin \alpha = v/c$ ist, denn dann ist das im rechten Bild von Abb. 1.7 mit b bezeichnete Stück:

$$b = L \cos \alpha = L \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = L \sqrt{1 - v^2/c^2} = L/k$$

1.3. Aus der Elektrik

Für die Kraft auf ein geladenes Teilchen gilt $F = q(E + vB)$. Ist $E = 0$, dann ist $F = qvB$ (Lorentzkraft).

1. Die spezielle Relativitätstheorie

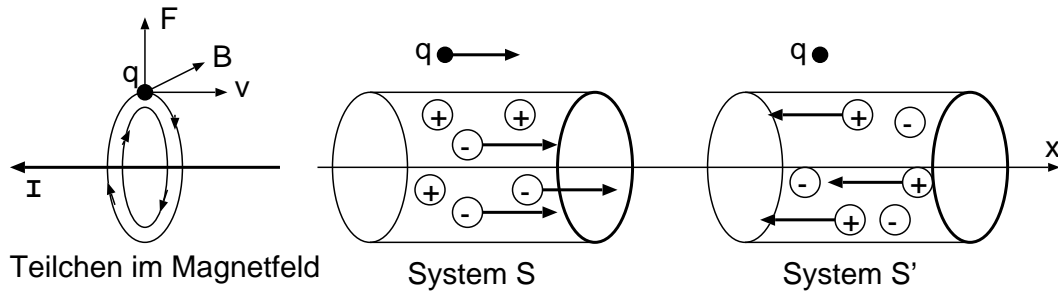


ABB. 1.8 Teilchen im elektromagnetischen Feld

Betrachtet man die Situation aus dem IS, in dem das Teilchen ruht, so ist dort $v = 0$, also kann keine Lorentzkraft wirken. Die Bewegung (Ablenkung) des Teilchens muss aber in jedem IS gleichermaßen beobachtet werden, d. h. B und E müssen vom Bezugssystem abhängen, es muss statt des magnetischen Felds ein elektrisches Feld beobachtet werden, denn nur ein elektrisches Feld kann Kräfte auf ruhende Ladungen ausüben.

Wir betrachten die Situation in Abb. 1.8, wobei wir der Einfachheit halber annehmen, dass die Ladung q dieselbe Geschwindigkeit wie die Leitungselektronen besitzt. (Das liegt dann in der Größenordnung von mm/s).

Die Ladungsdichte der Atomrümpfe sei ρ_+ , die der Elektronen sei ρ_- . Da der Leiter in seinem Ruhesystem S neutral ist, gilt $\rho_+ + \rho_- = 0$.

Im IS S' ruhen sowohl q als auch die Elektronen. Die Atomrümpfe bewegen sich dann mit der Geschwindigkeit $-v$. Das notwendige elektrische Feld wäre vorhanden, wenn die Ladungsdichte in S' nicht 0 wäre. Nun ist ja $\rho = Q/V$ und in allen ISen gilt $Q = Q'$ (das ist eine experimentelle Tatsache!), aber die Volumen unterliegen der Längenkontraktion:

$$V' = A\Delta x' = A\Delta x/k = V/k \quad \Rightarrow \quad \rho' = \frac{Q'}{V'} = \frac{kQ}{V} = k \cdot \rho$$

d. h. die ruhende Ladung hat die kleinste Ladungsdichte.

Nun ist, da die Elektronen sich in S bewegen, aber in S' ruhen:

$$\rho'_+ + \rho'_- = k\rho_+ + \rho_-/k = k\rho_+ - \rho_+/k = (k - 1/k)\rho_+ = \frac{kv^2}{c^2}\rho_+ > 0$$

Somit ist der Leiter in S' nicht neutral, folglich Quelle eines elektrischen Felds.

Probleme:

- Wo kommen die Ladungen her?
- Wie kann der Leiter in einem IS neutral, im anderen geladen sein, wenn die Ladung invariant ist?

- Man hat doch beim Übergang von S nach S' nur die Rollen von Atomrümpfen und Elektronen vertauscht, dann müsste doch $\rho'_- = -\rho_+ = \rho_-$ sein.

Die Lösung liegt in der unzulässigen Annahme der Existenz des unendlich langen geraden Leiters. Es gibt nur Stromkreise.

Wir stellen uns einen rechteckigen Stromkreis mit den Ecken $ABCD$ vor, wobei AB und CD parallel zu v liegen sollen. In diesem Stromkreis sollen nun die Atomrümpfe in S ruhen und die Elektronen des Seite AB in S' . Dann ruhen aber die Elektronen auf dem Stück CD nicht! Deshalb ist die Vertauschbarkeit hier nicht zutreffend. In S' hat CD entgegengesetzte Ladung wie AB . In BC und AD sind die Ladungen Null.

Wir zeigen nun die Gültigkeit der folgenden Gleichung:

$$\rho'_-(AB) + \rho'_-(CD) + \rho'_+(AB) + \rho'_+(CD) = 0$$

In S' bewegen sich die Rumpfe von AB und CD mit der Geschwindigkeit $-v$, also gilt:

$$\rho'_+(AB) = \rho'_+(CD) = k\rho_+(AB)$$

Wie oben gilt für die Elektronen:

$$\rho'_-(AB) = -\rho_+(AB)/k$$

Von S aus gesehen bewegen sich die Elektronen in CD mit $-v$. Von S' aus bewegt sich S mit $-v$, die Elektronengeschwindigkeit v^* muss also mit dem Additionstheorem bestimmt werden, sie ist von S aus:

$$-v^* = \frac{-2v}{1 + v^2/c^2} \Rightarrow \rho'_-(CD) = k^* \rho'_-(AB) = -\frac{k^*}{k} \rho_+(AB)$$

Setzt man nun das Ganze Zeug in die Behauptung ein, dann folgt:

$$-\rho_+(AB)/k - \frac{k^*}{k} \rho_+(AB) + k\rho_+(AB) + k\rho_+(AB) = \rho_+(AB) \left(-\frac{1}{k} - \frac{k^*}{k} + 2k \right) = 0$$

Es ist ja (mit $c = 1$ gerechnet)

$$k^* = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4v^2}{(1+v^2)^2}}} = \frac{1+v^2}{1-v^2} \Rightarrow \frac{k^*}{k} = k^* \sqrt{1-v^2} = \frac{1+v^2}{\sqrt{1-v^2}}$$

Damit ist nun

$$-\frac{1}{k} - \frac{k^*}{k} + 2k = -\sqrt{1-v^2} - \frac{1+v^2}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{2}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{-1+v^2-1-v^2+2}{\sqrt{1-v^2}} = 0$$

und unsere Behauptung bewiesen. Der gesamte Stromkreis ist also neutral, nicht aber die einzelnen Teile des Stromkreises.

1. Die spezielle Relativitätstheorie

Das elektromagnetische Feld: Wir sehen, dass es nicht ein Magnetfeld und ein elektrisches Feld gibt, die ganz verschiedene Eigenschaften haben, sondern es gibt nur ein elektromagnetisches Feld. Welches der beiden man beobachtet hängt nur vom Bezugssystem ab.

Ein Zahlenbeispiel: Kupferdraht mit $A = 0,5 \text{ cm}^2$ Querschnitt. Geschwindigkeit $v = 1 \text{ mm/s}$. Die Dichte von Kupfer ist $8,96 \text{ g/cm}^3$, seine Molmasse $63,5 \text{ g/mol}$. Kupfer ist einwertig, deshalb enthält 1 mol Kupfer $6 \cdot 10^{23}$ Ladungsträger. Damit enthält 1 cm^3 Kupfer die Ladung

$$\frac{8,96}{63,5} \cdot 6 \cdot 10^{23} \Rightarrow n = 8,5 \cdot 10^{22} \text{ Teil/cm}^3 \Rightarrow \rho = 13500 \text{ C/cm}^3$$

Die Ladung pro Längeneinheit ist dann $\rho_+ = neA = 675000 \text{ C/m}$

Die Stromstärke ist nun $I = nevA\rho_+ = 675 \text{ A}$.

In S hat man ein Magnetfeld der Stärke:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{1}{r} = 1,35 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{1}{r} \Rightarrow F = evB = 2,16 \cdot 10^{-26} \cdot \frac{1}{r}$$

In S' hat der Draht die Ladung ($k = 1$, da v sehr klein):

$$\rho' = k \frac{v^2}{c^2} \rho_+ = \frac{0,001^2}{c^2} \rho_+ = 7,5 \cdot 10^{-18} \text{ C/m}$$

Das elektrische Feld im Abstand r hat also die Größe:

$$E = \frac{\rho'}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} = 1,35 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{1}{r} \Rightarrow F = eE = 2,16 \cdot 10^{-26} \cdot \frac{1}{r}$$

In beiden ISEN wird also dieselbe Kraft beobachtet.

Zusatz: Das Elektron erfährt durch diese Kraft die Beschleunigung:

$$a = \frac{F}{m} = 2,16 \cdot 10^{-26} \cdot 0,9 \cdot 10^{-30} \cdot \frac{1}{r} = 2,4 \cdot 10^4 \cdot \frac{1}{r}$$

in Richtung des Drahts. Für $r = 1 \text{ cm}$ folgt somit $a = 2,4 \cdot 10^6 \text{ m/s}^2$

1.4. Relativistische Dynamik

1.4.1. Relativistische Masse

Ein Geschoss fliege in y -Richtung und schlage ein Loch in eine Wand. Die Tiefe dieses Lochs ist in allen ISEN gleich, da sie sich ja in y -Richtung erstreckt, aber Kontraktion nur in x -Richtung auftritt.

Die Ursache der Entstehung des Loches ist der Impuls des Geschosses, der je nach Bezugssystem $p_y = mu_y$ oder $p'_y = m'u'_y$ lautet. Da die Tiefe in beiden ISen gleich ist, muss $p'_y = p_y$ gelten.

Obwohl Längen in y -Richtung unverändert bleiben, gilt dies für die Geschwindigkeiten nicht, denn im bewegten IS ändert sich ja die Zeit, es ist ja $\Delta t' = k(\Delta t + v\Delta x/c^2)$. Damit gilt allgemein für die Transformation der Geschwindigkeit in y -Richtung:

$$u'_y = \frac{\Delta y'}{\Delta t'} = \frac{\Delta y}{k(\Delta t + v\Delta x/c^2)} = \frac{u_y}{k(1 + u_x v/c^2)} \quad (1.11)$$

Da in diesem Beispiel $u_x = 0$ ist, folgt:

$$u'_y = \frac{\Delta y'}{\Delta t'} = \frac{\Delta y}{k\Delta t} = u_y \cdot \frac{1}{k} \quad (1.12)$$

Da die Impulse gleich sind, folgt:

$$p_y = p'_y \Rightarrow mu_y = m'u'_y = m'u_y/k \Rightarrow m' = km$$

Die letzte Beziehung ist von u unabhängig, gilt also auch im Grenzfall verschwindenden u 's. Dann ruht die Kugel in S , während sie sich in S' mit der Geschwindigkeit v in x -Richtung bewegt. Somit gilt:

Notiz 1.7 *Bewegte Masse*

$$m = k \cdot m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (1.13)$$

Die Masse m_0 bezeichnet man als *Ruhmasse* oder *invariante Masse* des Körpers. Es ist die Masse, die der Beobachter für den in seinem IS ruhenden Körper bestimmt. In allen anderen ISen, in denen sich die Masse bewegt, misst man eine größere Masse.

Newtonsches Grundgesetz: Wegen der Abhängigkeit der Masse von v ist nun das Newtonsche Grundgesetz in der Form $F = ma$ nicht mehr gültig. Nimmt man jedoch an, dass der Impulssatz weiterhin gültig ist (das kann man nur experimentell widerlegen), so kann man schreiben:

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} = \frac{dm}{dv} \frac{dv}{dt} v + m \frac{dv}{dt} = \left(\frac{dm}{dv} \cdot v + m \right) \frac{dv}{dt} \quad (1.14)$$

Bei konstanter Kraft ist also nun die Beschleunigung nicht mehr konstant, sondern nimmt auf Kosten der Massenzunahme immer mehr ab. Mit den Feinheiten der Beschleunigung befassen wir uns im Abschnitt 1.5.

1. Die spezielle Relativitätstheorie

1.4.2. Energie

Es soll die kinetische Energie berechnet werden:

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= \int_0^s F ds = \int_0^s \frac{d(mv)}{dt} ds = \int_0^s \left(v \frac{dm}{dv} + m \right) \frac{dv}{dt} ds = \int_0^v \left(v \frac{dm}{dv} + m \right) v dv \\ &= \int_0^v \left(\frac{m_0 v \frac{1}{2} \cdot 2v/c^2}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} + \frac{m_0}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \right) v dv = \int_0^v \frac{m_0 v}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} dv \\ &= \left[\frac{c^2 m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right]_0^v = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0 c^2 = mc^2 - m_0 c^2 \end{aligned}$$

Stellt man die letzte Gleichung etwas um, dann bekommt man:

Notiz 1.8 Einsteingleichung

$$E = mc^2 = m_0 c^2 + E_{\text{kin}} \quad (1.15)$$

Das ist die berühmte Einsteinsche Gleichung $E = mc^2$

1.4.2.1. Energie-Impuls-Beziehung

Für den Impuls gilt $p = mv$, wobei aber nun für m die bewegte Masse zu nehmen ist. Aus $p = mv$ und $E = mc^2$ folgt damit:

$$E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4 - m^2 v^2 c^2 = m^2 c^4 (1 - v^2/c^2) = \frac{m_0^2 c^4 (1 - v^2/c^2)}{1 - v^2/c^2} = m_0^2 c^4$$

Daraus erhält man durch Umstellen die

Notiz 1.9 Energie-Impuls-Beziehung:

$$E^2 = (m_0 c^2)^2 + (pc)^2 \quad \text{mit } c = 1: \quad E^2 = m^2 = m_0^2 + p^2 \quad (1.16)$$

1.5. Gleichmäßig beschleunigte Systeme

1.5.1. Eigengeschwindigkeit und Eigenbeschleunigung

Im Alltagsleben kann man die Geschwindigkeit seines Autos so bestimmen: Man stoppt die Zeit, die zum Passieren einer bestimmten Zahl von Straßenpfosten (alle z. B. 50 m auseinander) benötigt wird. Die Raumpolizei würde einem aber bei diesem Verfahren wohl einen Strafzettel geben, denn hier nimmt man Länge und Zeit aus verschiedenen Bezugssystemen. Die Uhr ruht zum Auto, also misst man die Eigenzeit $\Delta\tau$, während man die Pfostenentfernungen verkürzt wahrnimmt.

Als *Eigengeschwindigkeit* v_e bezeichnet man

$$v_e = \frac{dx}{d\tau} \quad (1.17)$$

Zwischen der von der Autobahn aus gemessenen Geschwindigkeit v und der Eigengeschwindigkeit v_e besteht die folgende Beziehung (Kettenregel)

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{dx(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau(t)}{dt} \quad (1.18)$$

Nun ist aber nach der Zeitdilatation $dt = k d\tau$ und somit gilt

$$v_e = k \cdot v \quad (1.19)$$

Analog bildet man die *Eigenbeschleunigung* des bewegten Beobachters:

$$a_e = \frac{d^2x}{d\tau^2} = \frac{dv_e}{d\tau} \quad (1.20)$$

Nun ist aber die Eigenbeschleunigung *nicht* die Beschleunigung, die der Autofahrer spürt.

Zum Zeitpunkt t_0 habe B die Geschwindigkeit v_0 gegenüber A. Ein zweiter Beobachter C fahre mit konstanter Geschwindigkeit so neben B her, dass er zur Zeit t_0 ebenfalls die Geschwindigkeit v_0 hat. Da er aber mit konstanter Geschwindigkeit fährt, ist er ein Inertialbeobachter, B hingegen nicht, denn sein Ruhssystem ist beschleunigt. C misst nun für die Beschleunigung von B in seinem IS S' :

$$b = \frac{d^2x'}{d\tau^2} = \frac{d^2x/k}{d\tau^2} = \frac{a_e}{k} \quad (1.21)$$

Nun ist b die Änderung der Geschwindigkeit von B, gemessen im IS C, also dem zur Zeit t_0 synchronen Inertialsystem, somit ist b gerade die Beschleunigung, die B spürt.

1.5.2. Weltlinie der beschleunigten Bewegung

Das IS S' sei das momentane Ruhssystem für den Körper Ω , d. h. von S' aus gesehen bewegt sich Ω momentan mit $u' = 0$, während sich S' gegen S mit v bewegt; damit bewegt sich Ω momentan ebenfalls mit v . Man beachte, dass zwar $u' = 0$ ist, aber deshalb du' keineswegs 0 sein muss.

Nun gilt nach dem Additionstheorem (mit $c = 1$ gerechnet):

$$u' = \frac{u - v}{1 - uv} \Rightarrow \frac{du'}{dt} = \frac{(1 - uv) \frac{du}{dt} - (u - v) \frac{du}{dt} (-v)}{(1 - uv)^2} = \frac{1 - uv + uv - v^2}{(1 - uv)^2} \cdot \frac{du}{dt}$$

Da aber $u = v$ ist, folgt

$$\frac{du'}{dt} = \frac{1}{1 - v^2} \frac{du}{dt} = k^2 \frac{du}{dt} \Rightarrow \frac{du'}{dt'k} = k^2 \frac{du}{dt} \Rightarrow b = \frac{du'}{dt'} = k^3 \frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}(k(u) \cdot u) \quad (1.22)$$

1. Die spezielle Relativitätstheorie

mit dem b aus Gleichung (1.21)

Wir wollen nun annehmen, dass Ω ein Raumschiff sei, das sich stets so bewegt, dass die Besatzung immer dieselbe Beschleunigung b spürt. Auf welcher Weltlinie muss sich so ein Raumschiff bewegen?

Dazu integriert man Gleichung (1.22) unter der Annahme $b = \text{const}$ und $u(0) = 0$:

$$bt = k(u)u = \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \Rightarrow b^2 t^2 - b^2 t^2 u^2 = u^2 \Rightarrow u = \frac{dx}{dt} = \frac{t}{\sqrt{1/b^2 + t^2}} \quad (1.23)$$

Das kann man nochmal integrieren, um einen Zusammenhang zwischen x und t , eben die Weltlinie zu erhalten:

$$x = \sqrt{1/b^2 + t^2} \Rightarrow x^2 - t^2 = \frac{1}{b^2} \equiv x_0^2 \quad (1.24)$$

Die Weltlinie eines konstant beschleunigten Körpers ist also eine *Hyperbel*. In der klassischen Mechanik gilt dagegen $x = \frac{1}{2}bt^2$, man hat dort also als Weg-Zeit-Diagramm (Weltlinie) eine Parabel.

Aus den Gleichungen (1.23) und (1.24) folgt noch

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t}{x} \quad (1.25)$$

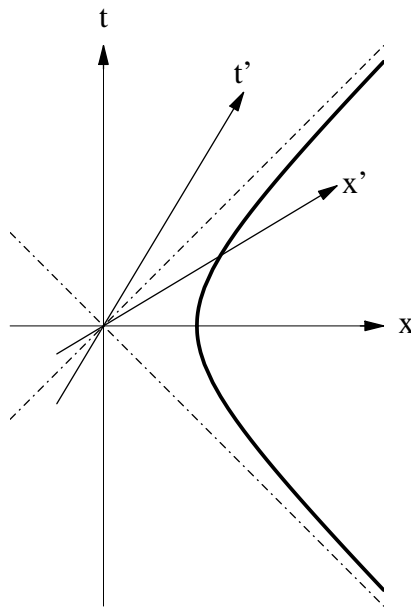


ABB. 1.9 Weltlinie der gleichmäßig beschleunigten Bewegung

Da nun die Steigung der x' -Achse gerade v ist, hat die x' -Achse des momentanen Ruhesystems von Ω im Ereignis $(t|x)$ die Steigung t/x , geht also durch $(0|0)$. Daraus ergibt sich eine Reihe verblüffender Folgerungen:

- jedes Ereignis im Raumschiff Ω ist zu $(0|0)$ gleichzeitig. Der Ursprung ist die „Ewigkeit“.
- Im zweiten und dritten Feld des Minkowski-Diagramms laufen Vorgänge für den Beobachter in Ω rückwärts ab, wenn sie von S aus vorwärts ablaufen.
- Ereignisse $(t|x)$ in S mit $|x| \leq |t|$ (das ist das Gebiet der für S zeitartigen Ereignisse) sind zu keinem Ereignis in Ω gleichzeitig.

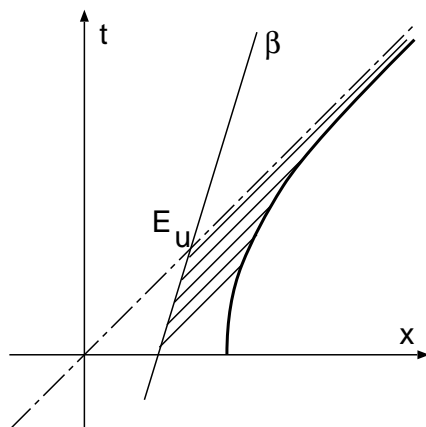
Das hört sich allerdings schlimmer an als es tatsächlich ist, denn Ω kann ja nur von Vorgängen erfahren, die im Weltdiagramm unterhalb der ersten Winkelhalbierenden liegen, denn nur von dort ausgehende Lichtblitze (Signale) können die Weltlinie von Ω schneiden. Entsprechend kann Ω nur auf Ereignisse einwirken, die von seinen Lichtblitzen erreicht werden können, dies sind die Ereignisse oberhalb der zweiten Winkelhalbierenden.

Die Winkelhalbierenden zerlegen nun den Minkowski-Raum verschiedene Gebiete, die für die Besetzung von Ω verschieden erfahrbar sind:

$V : t < x$ ist die *Vergangenheit*, nur Ereignisse aus diesem Bereich können beobachtet werden. $Z : t > -x$ ist die *Zukunft*, nur in diesem Bereich kann man von den Omeganern Kenntnis erhalten. „Übliche“ Ereignisse, von denen man sowohl Kenntnis erhalten, als auch Kenntnis liefern kann, liegen also in der Schnittmenge von V und Z dem *Diesseits* $D = V \cap Z$. Ereignisse in $Z \setminus V$ liegen nach aller Zeit sie bilden die *unendliche Zukunft*. Entsprechend liegen Ereignisse aus $V \setminus Z$ vor aller Zeit in der *unendlichen Vergangenheit*. Das *Jenseits* ist die Komplementmenge zu $V \cup Z$, zu diesen Ereignissen hat Ω keinerlei Kontakt. Die dort – wie oben erwähnt – rückwärts laufenden Vorgänge können also nicht beobachtet werden.

Es zeigt sich, dass es vom System abhängen kann, ob ein Ereignis stattfindet oder nicht!. (*Relativität der Existenz*)

EREIGNISHORIZONT:



Nun fliege ein Raumschiff β mit konstanter Geschwindigkeit bezüglich S . Die Lichtblitze, die von β in gleichen Zeitabständen ausgesandt werden, erreichen Ω in immer größer werdenden Zeitabständen, wenn β sich auf das Ereignis E_u zu bewegt. Einen in E_u ausgesandten Lichtblitz kann Ω nie mehr empfangen. Die erste Winkelhalbierende stellt also einen *Ereignishorizont* für Ω dar. Für den Dopplerfaktor D gilt bei Annäherung von β an den Horizont $v \rightarrow c$, also $D \rightarrow \infty$. Für Ω verschwindet also β nicht plötzlich hinter dem Ereignishorizont, sondern seine Bewegung scheint „einzufrieren“.

2. Zur Allgemeinen Relativitätstheorie

2.1. Das Äquivalenzprinzip

Die Masse eines Körpers beschreibt zwei Eigenschaften, erstens dessen Trägheit, z. B. im Newtonschen Grundgesetz und zweitens dessen Schwere, wie im Gravitationsgesetz. Dass beide Eigenschaften durch eine Größe ausgedrückt werden können, ist nicht selbstverständlich, denn die Schwere entspricht eher einer Art felderzeugender „Ladung“. Daher wurden schon von Galilei Versuche durchgeführt, die die Gleichheit dieser beiden Größen beweisen sollten. Die neuesten Versuch von EÖTVÖS (1889) und DICKE (1960) zeigten die Gleichheit mit einem relativen Fehler unter 10^{-9} Prozent.

Ähnlich wie in der SRT setzte Einstein auch hier das Versuchsergebnis als Grundlage seiner Theorie. Dies impliziert nun, dass ein Beobachter nicht entscheiden kann, ob die Ursache für das Fallen losgelassener Objekte die Schwerkraft ist, oder ob er sich in einem „nach oben“ beschleunigten Bezugssystem befindet.

Dies gilt allerdings nur, wenn das beobachtete Gebiet klein genug ist, denn sonst sind die Gravitationsfeldlinien (etwa auf der Erde) nicht parallel, während in einem linear beschleunigten System die Trägheitskräfte immer parallel sind.

Am Anfang der Relativitätstheorie stehen somit die folgenden beiden Prinzipien:

Äquivalenzprinzip: In hinreichend kleinen Raum-Zeit-Gebieten lassen sich Trägheit und Schwere experimentell nicht unterscheiden.

Allgemeines Relativitätsprinzip: Alle Naturgesetze lassen sich so formulieren, dass sie in allen lokalen Bezugssystemen (also auch beschleunigten oder einem Gravitationsfeld ausgesetzten) gleich lauten.

Insbesondere ist dann die Lichtgeschwindigkeit *lokal* gleich c .

Die ART ist mathematisch äußerst anspruchsvoll. Deshalb betrachten wir in diesem Überblick nur sehr einfache Fälle. Insbesondere sind alle unsere Gravitationsquellen kugelförmige Massen, die nicht rotieren. Bei (fast) allen Gleichungen setzen wir $c = 1$.

2.2. Maßstäbe und Uhren im Gravitationsfeld

Wir betrachten zwei Beobachter A und B, die in den Entfernungen r_A und r_B mit $r_A < r_B$ vom Massenzentrum ruhen mögen. Um die Anzeige der Uhren von A und B vergleichen zu können, lassen wir einen dritten Beobachter C vom Unendlichen aus der Ruhe heraus fallen.

2.2.1. Zeitabhängigkeit vom Gravitationsfeld

Nach dem Gravitationsgesetz ist das Potential des Gravitationsfelds im Abstand r vom Massenzentrum, bei im Unendlichen liegendem Nullniveau:

$$\varphi(r) = -\frac{GM}{r} \quad (2.1)$$

Man beachte, dass $\varphi(r) \leq 0$ für alle r und streng monoton steigend ist.

Fällt nun C bis zur Höhe r , dann gewinnt er kinetische Energie und verliert potentielle Energie:

$$\frac{v^2}{2} + \varphi(r) = 0 \quad (\text{Potentialbeziehung}) \quad (2.2)$$

Aus dieser Gleichung kann man nun die Geschwindigkeit von C in den Höhen von A und B ermitteln.

In den (kurzen) Augenblicken, wo C die Beobachter A bzw. B passiert, kann man seine Geschwindigkeit als momentan konstant ansehen. (Das ist eine entsprechende Situation wie beim momentanen Ruhesystem in Abschnitt 1.5). Nach dem Äquivalenzprinzip kann man nun aber jeweils C als ruhend ansehen und A bzw. B beschleunigt an C vorbeifliegend denken. Dies tun sie mit den Geschwindigkeiten v_A und v_B .

Vom nun ruhenden System C aus gesehen gehen die bewegten Uhren von A und B um den Faktor k_A bzw. k_B langsamer, also ist:

$$\text{bei A: } \Delta t_C = k_A \Delta t_A \quad \text{bei B: } \Delta t_C = k_B \Delta t_B$$

Somit gilt:

$$\frac{\Delta t_A}{\Delta t_B} = \sqrt{\frac{1 - v_A^2}{1 - v_B^2}}$$

Für kleine v kann man diesen Ausdruck annähern durch:

$$\frac{\Delta t_A}{\Delta t_B} \approx \left(1 - \frac{1}{2}v_A^2\right)\left(1 + \frac{1}{2}v_B^2\right) \approx 1 + \frac{1}{2}v_B^2 - \frac{1}{2}v_A^2 = 1 + \varphi(r_A) - \varphi(r_B)$$

Da nun wegen der Monotonie $\varphi(r_A) < \varphi(r_B)$ ist, folgt $\Delta t_A < \Delta t_B$, und wir haben schon ein erstes Ergebnis:

Notiz 2.1 *Je stärker das Gravitationsfeld ist, desto langsamer gehen die Uhren.*

2. Zur Allgemeinen Relativitätstheorie

Ist nun $h = r_B - r_A \ll r_A$, dann gilt:

$$\begin{aligned}\varphi(r_A) - \varphi(r_B) &= \frac{GM}{r_A} - \frac{GM}{r_B} \\ &= -GM \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{h}{r_A}} \right) \approx -\frac{GM}{r_A} (1 - (1 - h/r_A)) \approx -\frac{GM}{r_A^2} \cdot h\end{aligned}$$

Nun ist aber $g_A = GM/r_A^2$ gerade die Fallbeschleunigung im Abstand r_A , deshalb kann man schreiben:

$$\Delta t_A = \Delta t_B (1 - g_A h) \quad (2.3)$$

An dieser Stelle mal ein Tipp, wie man wieder auf die „richtigen“ Formeln kommt, die c enthalten. In der obigen Gleichung zieht man $g_A h$ von 1 ab, deshalb muss $g_A h$ dimensionslos sein. So wie es dasteht hat es aber die Einheit m^2/s^2 . Man muss also durch c^2 dividieren, um die richtigen Einheiten zu bekommen. Also heißt die Gleichung:

$$\Delta t_A = \Delta t_B (1 - g_A h / c^2)$$

2.2.2. Schwarzschildradius und Zeitabhängigkeit

Es soll nun angenommen werden, dass der Beobachter B so weit entfernt sei, dass er das Gravitationsfeld vernachlässigen kann. Diesen Beobachter nennt man den *feldfreien Beobachter*. Für ihn ist immer $\varphi = 0$ und $v = 0$. Seine Koordinaten schreibt man in Zukunft *ohne* Indexe. Er ist äquivalent zum Beobachter C, also ein Inertialbeobachter.

Dann gilt exakt:

$$\Delta t_A = \Delta t \sqrt{1 - v_A^2} = \Delta t \sqrt{1 - \frac{2GM}{r_A}} = \Delta t \sqrt{1 - \frac{\mathfrak{R}}{r_A}}$$

Hier hat man als Abkürzung den *Schwarzschildradius*

$$\mathfrak{R} = 2GM = \frac{2GM}{c^2} \quad (2.4)$$

eingeführt. Daneben führt man noch den *allgemeinen K-Faktor* ein:

$$K_A = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mathfrak{R}}{r_A}}} \approx 1 + \frac{\mathfrak{R}}{2r_A} = 1 - \varphi(r_A) \quad (2.5)$$

Für die Sonne ist $\mathfrak{R} \approx 3 \text{ km}$ für die Erde $\mathfrak{R} \approx 9 \text{ mm}$.

Damit gilt nun:

Notiz 2.2 Misst der bei r_A im Gravitationsfeld ruhende Beobachter A auf seiner Uhr das Zeitintervall Δt_A , so misst der feldfreie Beobachter auf seiner Uhr das längere Zeitintervall

$$\Delta t = K_A \Delta t_A \quad (2.6)$$

2.2.3. Gravitationsrotverschiebung

Der Beobachter A betreibe eine Lichtquelle, die nach seinen Messungen Licht der Frequenz $f_A = 1/T_A$ aussendet. Der feldfreie Beobachter misst für die Schwingungsdauer dieses Lichts also die Zeit $T = K_A T_A$. Folglich erscheint das bei ihm ankommende Licht rotverschoben. Für die Beobachter A und B gilt nach Gl. (2.3): $T_A = T_B(1 - g_A h) \Rightarrow f_B = f_A(1 - g_A h) \Rightarrow f_B - f_A = -f_A g_A h$. In üblichen Einheiten also

$$\frac{\Delta f}{f} = -\frac{gh}{c^2}$$

Diese Rotverschiebung kann mit dem Mößbauereffekt gemessen werden. Bei einer Höhendifferenz von $h = 20$ m erhält man $\Delta f/f \approx 2 \cdot 10^{-15}$. Das ist eine ungeheure Messgenauigkeit. Licht von $\lambda = 500$ nm hat ja eine Frequenz von $f = c/\lambda \approx 6 \cdot 10^{14}$ Hz. Man beobachtet hier also ein $\Delta f = 1,2$ Hz, also das Fehlen einer Schwingung unter 100 Billionen!

2.2.4. Maßstäbe im Gravitationsfeld

Wieder lassen wir aus dem feldfreien Gebiet den Beobachter C am im Abstand r_A ruhenden Maßstab vorbeifallen. C ist wieder Inertialbeobachter, also mit dem feldfreien Beobachter äquivalent. C passiert nun A mit v_A oder andersrum: A bewegt sich gegenüber dem ruhenden C mit $-v_A$. Misst nun A für seinen Maßstab die Länge L_A , so misst C wegen der Längenkontraktion die Länge $L = L_A/k_A = L/K_A$.

Notiz 2.3 *Misst der Beobachter A in seinem System für die Länge eines Maßstabs die Länge L_A , so misst der feldfreie Beobachter für diese Länge den Wert*

$$L = L_A/K_A = L_A \sqrt{1 - \frac{\mathfrak{R}}{r_A}} \quad (2.7)$$

wenn der Maßstab längs zur Feldrichtung liegt, und keine Längenänderung, wenn der Maßstab quer zur Feldrichtung liegt.

Die Maßstabsänderungen kann man nicht wie die Zeitänderungen im Experiment direkt nachweisen, denn sobald man den verkürzten Maßstab zum feldfreien Beobachter bringt, bekommt er ja wieder seine ursprüngliche Länge. Allerdings kann die Maßstabsveränderung indirekt nachgewiesen werden.

2.2.5. Lichtgeschwindigkeit im Gravitationsfeld

Nach dem allgemeinen Relativitätsprinzip ist für jeden Beobachter die Lichtgeschwindigkeit *lokal* gleich 1. Für entfernte Beobachter muss das keineswegs der Fall sein.

2. Zur Allgemeinen Relativitätstheorie

Für die Lichtgeschwindigkeit parallel zur Feldrichtung gilt:

$$1 = c_A(r_A) = \frac{\Delta x_A}{\Delta t_A} = \frac{\Delta x \cdot K}{\Delta t/K} = c(r_A) \cdot K^2$$

Entsprechend quer zur Feldrichtung (dann tritt keine Längen-, nur eine Zeitänderung auf):

$$1 = c_A(r_A) = \frac{\Delta x_A}{\Delta t_A} = \frac{\Delta x}{\Delta t/K} = c(r_A) \cdot K$$

Daraus ergibt sich die folgende

Notiz 2.4 Der feldfreie Beobachter misst für die Lichtgeschwindigkeit $c(r)$ am Ort r die folgenden Werte:

$$c(r) = K^{-2} = 1 - \frac{\mathfrak{R}}{r} \quad \text{längs zur Feldrichtung} \quad (2.8)$$

$$c(r) = K^{-1} = \sqrt{1 - \frac{\mathfrak{R}}{r}} \quad \text{quer zur Feldrichtung} \quad (2.9)$$

FOLGERUNGEN

- Die Abhängigkeit von c vom Gravitationsfeld führt zu Laufzeitunterschieden bei Veränderung des Gravitationsfelds. Dies wurde von SHAPIRO experimentell bestätigt.
- Jede Masse wirkt wie eine Gravitationslinse, es findet Brechung statt, denn Brechung entsteht ja wegen unterschiedlichen Lichtgeschwindigkeiten in den verschiedenen Medien.

2.2.5.1. Lichtablenkung im Schwerefeld

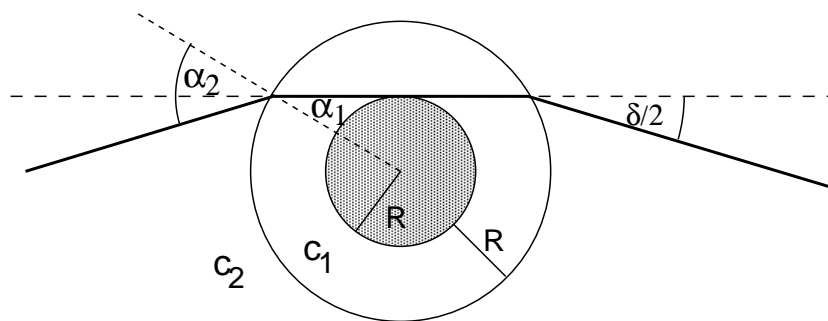


ABB. 2.1 Lichtablenkung im Schwerefeld

In Abb. 2.1 lassen wir einen Lichtstrahl am Sonnenrand vorbeistreichen. (Sonnenradius R) Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass sich die Lichtgeschwindigkeit sprunghaft ändert. Im Gebiet $R < r < 2R$ sei sie $c_1 = 1 - \mathfrak{R}/R$, außerhalb dieses

Gebiets sei sie $c_2 = 1$. Zusätzlich nehmen wir an, dass das Licht im Innenbereich längs der Feldrichtung verläuft. Das sind sehr grobe Vereinfachungen, so dass wir nur ein Ergebnis in der richtigen Größenordnung erwarten können.

Da $\sin \alpha_1 = R/(2R) = 0,5$ ist, bekommt man mit dem Brechungsgesetz:

$$\sin \alpha_2 = \frac{c_2}{c_1} \sin \alpha_1 = \sin \alpha_1 \cdot K = \frac{1}{2}(1 + \mathfrak{R}/R) = \frac{1}{2} + \frac{\mathfrak{R}}{2R}$$

Nun ist aber $\alpha_2 = \alpha_1 + \delta/2$, woraus folgt:

$$\sin \alpha_2 = \sin(\alpha_1 + \delta/2) = \sin \alpha_1 \cos \frac{\delta}{2} + \cos \alpha_1 \sin \frac{\delta}{2} \approx \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{\delta}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} + \frac{\delta}{4} \sqrt{3}$$

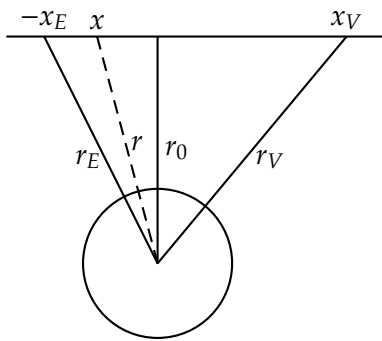
Vergleicht man die beiden für α_2 ermittelten Werte, dann folgt:

$$\frac{\mathfrak{R}}{2R} = \frac{\delta}{4} \sqrt{3} \Rightarrow \delta = 1,15 \frac{\mathfrak{R}}{R}$$

Der exakte Wert, ohne die vielen Vereinfachungen, ist $\delta = 2\mathfrak{R}/r_{\min}$.

Diese Lichtablenkung war der erste Test der ART (Sonnenfinsternis 1919). Damals wurde der Wert nur sehr ungenau bestätigt. Für die Sonne müsste $\delta = 1,75''$ sein (Im Bogenmaß rechnen, Sonnenradius ca 700 000 km und $\mathfrak{R} \approx 3$ km). Radioastronomische Messungen mit dem Quasar 3C279 haben den Wert sehr genau bestätigt.

2.2.5.2. Shapiro-Experiment



Von Shapiro wurde die Venus mit Radarimpulsen angepeilt, während sie durch die obere Konjunktion lief. Da in Sonnennähe die Lichtgeschwindigkeit kleiner als auf der Erde ist, erwartet man eine Verlängerung der Laufzeit.

Für die Erde ist $\mathfrak{R}/R \approx 1,42 \cdot 10^{-9}$ und für die Sonne $\mathfrak{R}/R \approx 4,23 \cdot 10^{-6}$, also sind dort die relativistischen Effekte ca 2000 mal größer. Nimmt man wieder an, dass das Licht parallel zur Feldrichtung verläuft, so gilt für die Laufzeiten:

ohne Feld: $dt = dx/c$ und mit Feld: $dt = dx/c(r)$

Für den Laufzeitunterschied (hin und zurück) also:

$$\begin{aligned} \Delta t &= 2 \int_{-x_E}^{x_V} \left(\frac{1}{c(r)} - 1 \right) dx = 2 \int_{-x_E}^{x_V} \left(\frac{1}{1 - \mathfrak{R}/r} - 1 \right) dx \approx 2\mathfrak{R} \int \frac{dx}{r} \\ &= 2\mathfrak{R} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + r_0^2}} \end{aligned}$$

2. Zur Allgemeinen Relativitätstheorie

Die Stammfunktion kann man einer Tafel entnehmen, dann ergibt sich:

$$\Delta t = 2\Re \ln \frac{x_V + \sqrt{x_V^2 + r_0^2}}{-x_E + \sqrt{x_E^2 + r_0^2}}$$

Da $r_0/x_E \approx 1/100$ kann man die Wurzeln nähern und weiterhin $x_E \approx r_E$ sowie $x_V \approx r_V$ setzen, dann bekommt man für das Argument des ln:

$$\frac{x_V(1 + \frac{1}{2}r_0^2/x_V^2) + x_V}{x_E(1 + \frac{1}{2}r_0^2/x_E^2) - x_E} \approx \frac{2x_V}{\frac{1}{2}r_0^2/x_E} \approx \frac{4r_E r_V}{r_0^2}$$

Daraus ergibt sich mit $r_0 = r_{\text{Sonne}}$

$$\Delta t = 2\Re \ln \frac{4r_E r_V}{r_0^2} = 230 \mu\text{s}$$

2.2.6. Die Bedeutung der Koordinaten

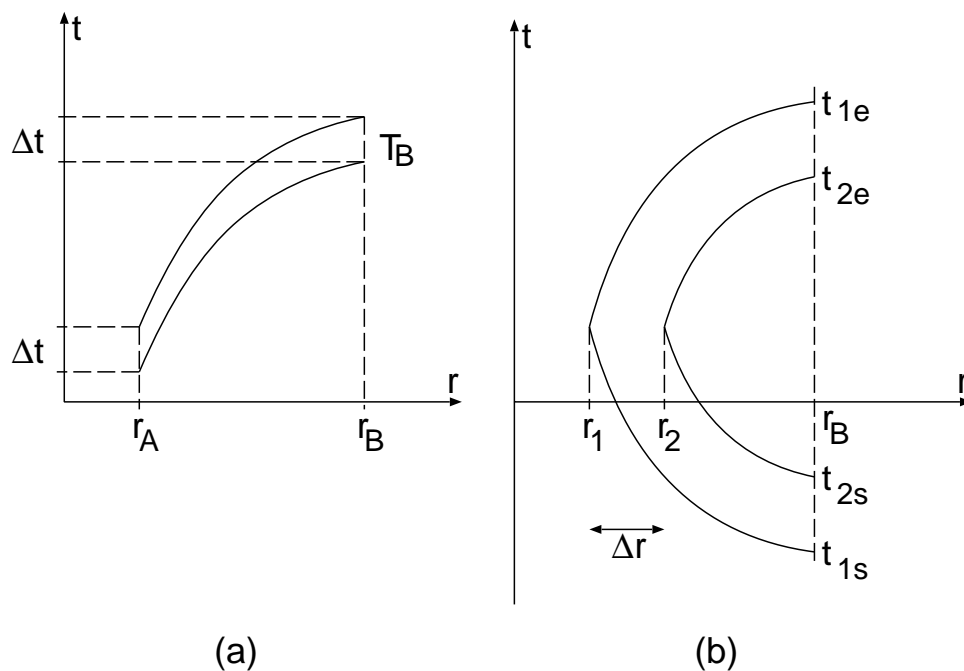


ABB. 2.2 Messung von Koordinaten des feldfreien Beobachters

Notiz 2.5 Sind $E_1(t_1|r_1)$ und $E_2(t_2|r_2)$ zwei Ereignisse im Koordinatensystem des feldfreien Beobachters mit $|\Delta r| = |r_2 - r_1| \ll r_1$, dann misst der im Feld bei r_1 ruhende Beobachter

den zeitlichen Abstand $\Delta\tau$ und den räumlichen Abstand $\Delta\rho$ (in radialer Richtung):

$$\Delta\tau = \Delta t/K = \Delta t \sqrt{1 - \frac{\mathfrak{R}}{r_1}} \quad (2.10)$$

$$\Delta\rho = \Delta r \cdot K = \frac{\Delta r}{\sqrt{1 - \frac{\mathfrak{R}}{r_1}}} \quad (2.11)$$

Der in r_2 ruhende Beobachter misst praktisch dasselbe, da $\Delta r \ll r$.

Wie misst nun der feldfreie Beobachter seine Koordinatendifferenzen? Zeitdifferenzen werden durch Beobachtung von Lichtblitzen gemessen. (vgl. Abb. 2.2(a)). Da die Lichtgeschwindigkeit $c(r)$ von der Zeit unabhängig ist, gehen die zu den Zeiten t_1 und t_2 gehörigen Lichtblitzweltlinien durch eine Verschiebung um Δt auseinander hervor. Man beachte, dass in der ART die Lichtblitzweltlinien nicht mehr zur Winkelhalbierenden parallele Geraden sind, sondern nun gekrümmt. Da die Steigung dieser Weltlinien nun aber (wegen der „vertauschten“ Achsen) gerade $1/c(r)$ ist, und $c(r)$ gemäß Gl. (2.8) und Gl. (2.9) monoton steigend ist, ist $1/c(r)$ monoton fallend. Damit sind die Weltlinien Rechtskurven. Das empfangene Zeitintervall T_B ist also gerade gleich der Koordinatenzeitdifferenz Δt .

Will er dagegen den räumlichen Abstand Δr etwa mit der Radarmethode ausmessen, so ergibt sich gemäß Abb. 2.2(b) für die gemessene Distanz nach der üblichen Weise:

$$\text{Weg} = c \cdot (\text{Laufzeit zum Fernen} - \text{Laufzeit zum Nahen})/2$$

$$\Delta\tilde{r} = \int_{r_1}^{r_B} \frac{dr}{c(r)} - \int_{r_2}^{r_B} \frac{dr}{C(r)} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{1 - \mathfrak{R}/r} \approx \frac{\Delta r}{1 - \mathfrak{R}/r} > \Delta r$$

Er misst also mit der Radarmethode sogar einen größeren Abstand als der Beobachter vor Ort, obwohl Maßstäbe im Feld schrumpfen sollten. Die Radarmethode ist also zur Ortskoordinatenmessung nicht geeignet. Der Grund ist die Abhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit von r ; diese Schwierigkeit taucht bei der Zeitmessung nicht auf.

Was ist nun r ? Ursprünglich hatten wir r eingeführt über die Gleichung (2.2) also über

$$-\frac{v^2}{2} = \varphi(r) = -\frac{\mathfrak{R}}{2r}$$

Damit hat r die Bedeutung eines „Potentialanzeigers“.

Es gibt aber doch noch einen Weg r zu ermitteln. Aber quer zur Feldrichtung schrumpfen Maßstäbe nicht, d. h. ein quer zur Feldrichtung liegender Maßstab in doppelter Entfernung erscheint halb so groß. Damit kann r gemessen werden über den *Schwinkel* unter dem ein Einheitsmaßstab, der quer zur Feldrichtung liegt, erscheint.

2. Zur Allgemeinen Relativitätstheorie

2.3. Die Schwarzschildmetrik

In der SRT haben wir gesehen, dass das Weltabstandsquadrat

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

vom Koordinatensystem unabhängig ist. (vgl. Gl. (1.7)). Für zeitartige Bewegungen war ds das Eigenzeitintervall des Beobachters.

Legen wir nun x in radiale Richtung, setzen also $x = r$, dann gilt für den Beobachter A:

$$ds_A^2 = dt_A^2 - dr_A^2 + dy_A^2 - dz_A^2$$

Drückt man nun die lokalen Koordinaten durch die des feldfreien Beobachters aus, dann ergibt sich die

Notiz 2.6 *Im Schwerefeld einer nicht rotierenden, kugelförmigen Masse ist das Weltabstandsquadrat gegeben durch:*

$$ds^2 = ds_A^2 = dt^2 \left(1 - \frac{\mathfrak{R}}{r_A}\right) - dr^2 \left(1 - \frac{\mathfrak{R}}{r_A}\right)^{-1} + dy^2 + dz^2 \quad (2.12)$$

Das ist die berühmte *Schwarzschildmetrik* (SSM). Unsere Herleitung liefert das exakte Ergebnis, d. h. diese Lösung würde man auch mit den Einsteinschen Feldgleichungen erhalten.

Im Folgenden werden wir nur radiale Bewegungen untersuchen. Dann ist $dy = dz = 0$.

2.3.1. Bewegungsgleichung frei fallender Körper

Wieder mal lassen wir den Beobachter C, aus dem Unendlichen kommend, an A vorbei fallen. A misst dann für die Zeit des bewegten C: $dt_A = K dt_C$, oder $dt_C = dt_A/K = dt/K^2$, wobei dt wieder vom feldfreien Beobachter stammt.

Andererseits ist die Eigenzeit von C ja ds^2 , also

$$dt_C^2 = ds^2 = (1 - \mathfrak{R}/r_A) dt^2 - (1 - \mathfrak{R}/r_A)^{-1} dr^2 = (1 - \mathfrak{R}/r_A) dt^2 - v_C^2 dt_C^2 (1 - \mathfrak{R}/r_A)^{-1}$$

wobei

$$v_C = \frac{dr}{dt_C}$$

ist.

Damit gilt nun:

$$dt_C^2 (1 - \mathfrak{R}/r_A) = (1 - \mathfrak{R}/r_A)^2 dt^2 - v_C^2 dt_C^2 \Rightarrow dt_C^2 (1 - \mathfrak{R}/r_A + v_C^2) = (1 - \mathfrak{R}/r_A)^2 dt^2$$

Dies stimmt mit der obigen Gleichung

$$dt_C = dt/K^2 = dt(1 - \mathfrak{R}/r_A)$$

dann überein, wenn

$$v_C^2 = \left(\frac{dr}{dt_C} \right)^2 = \frac{\mathfrak{R}}{r_A} \quad (2.13)$$

gilt.

Damit hat man nun die Bewegungsgleichung eines frei fallenden Körpers:

$$\left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 = \frac{\mathfrak{R}}{r} \quad (2.14)$$

wo τ die Eigenzeit dieses Körpers ist und r sein Ort in Koordinaten des feldfreien Beobachters.

Für die Eigenzeit des feldfreien Beobachters hat man

$$dt_C = d\tau = dt/K^2 = dt \left(1 - \frac{\mathfrak{R}}{r} \right) \quad (2.15)$$

Man beachte, dass ein frei fallender Beobachter immer einem feldfreien Beobachter äquivalent ist.

Das zeigt, dass in der Potentialbeziehung (2.2) v als Eigengeschwindigkeit aufzufassen ist. r wird aus dem System des feldfreien Beobachters genommen und τ ist die Eigenzeit.

2.3.2. Eigenschaften der Schwarzschildmetrik

1. Für $r \rightarrow \infty$ geht die SSM in das Minkowskische Weltabstandsquadrat der SRT über, denn in großer Entfernung ist kein Gravitationsfeld mehr spürbar.
2. Für $r = \mathfrak{R}$ wird der Koeffizient von dr^2 Unendlich und der von dt^2 Null. Des weiteren ändern diese Koeffizienten beim Übergang von $r > \mathfrak{R}$ nach $r < \mathfrak{R}$ ihr Vorzeichen. Das Vorzeichen entscheidet aber darüber, ob ein Weltabstand zeitartig oder raumartig ist. Im Gebiet $r < \mathfrak{R}$ innerhalb des Schwarzschildradius ist also t eine Raumkoordinate und r eine Zeitkoordinate!!
3. Bei $r = 0$ haben beide Koeffizienten Pole. Dort ist also kein Weltabstandsquadrat mehr definiert. (Singularität)

2.3.2.1. Fall ins schwarze Loch

Wir schicken von $r = 10\mathfrak{R}$ zur Zeit $t = 0$ einen Lichtblitz in radialer Richtung aus. Da für Lichtblitze $ds^2 = 0$ gilt, folgt

$$dt^2 = \frac{dr^2}{(1 - \mathfrak{R}/r)^2} \Rightarrow dt = \pm \frac{dr}{1 - \mathfrak{R}/r}$$

Dabei gilt das obere Vorzeichen für Entfernung vom Massenzentrum, das untere für Annäherung.

2. Zur Allgemeinen Relativitätstheorie

Läuft der Lichtblitz auf die Masse bei $r = 0$ zu, so ist die für die Strecke Δr benötigte Zeit:

$$T = \int_0^T dt = - \lim_{R \rightarrow \mathfrak{R}} \int_{10\mathfrak{R}}^R \frac{dr}{1 - \mathfrak{R}/r} = 9\mathfrak{R} + \mathfrak{R} \left(\ln(9\mathfrak{R}) - \lim_{R \rightarrow \mathfrak{R}} \ln(R - \mathfrak{R}) \right) = \infty$$

Auch für den bei $r = 10\mathfrak{R}$ ruhenden Beobachter A ist wegen

$$T_A = T/K = T \sqrt{1 - \frac{\mathfrak{R}}{10\mathfrak{R}}} = T \sqrt{0,9}$$

ebenfalls $T_A = \infty$. Damit gilt die

Notiz 2.7 Weder der feldfreie Beobachter, noch der irgendwo im Feld ruhende Beobachter A erleben je den Übertritt eines Lichtblitzes in das Gebiet $r < \mathfrak{R}$ hinter dem Ereignishorizont.

Dasselbe gilt erst recht für einen Körper, der auf die Masse zu stürzt, da sich dieser ja langsamer als ein Lichtblitz bewegen muss.

2.3.2.2. u - und w -Linien der SSM

Im feldfreien Gebiet sind die Weltlinien von Lichtblitzen gegeben durch

$$t = r + w \quad \text{auslaufend} \quad t = -r + u \quad \text{einlaufend}$$

Jeder radiale Lichtblitz ist also eindeutig durch die Angabe des Parameters w bzw. u bestimmt. Die Weltlinien heißen dann u - bzw. w -Linien. Ein Ereignis $E(t|r)$ kann genauso gut durch die Angabe $(w|u)$ festgelegt werden. Man kann demnach u und w als neue Koordinaten auffassen, die mit r und t folgendermaßen zusammenhängen:

$$u = t + r \quad w = t - r \quad t = \frac{u + w}{2} \quad r = \frac{u - w}{2} \quad (2.16)$$

Nun bestimmen wir die u - und w -Linien für die SSM:

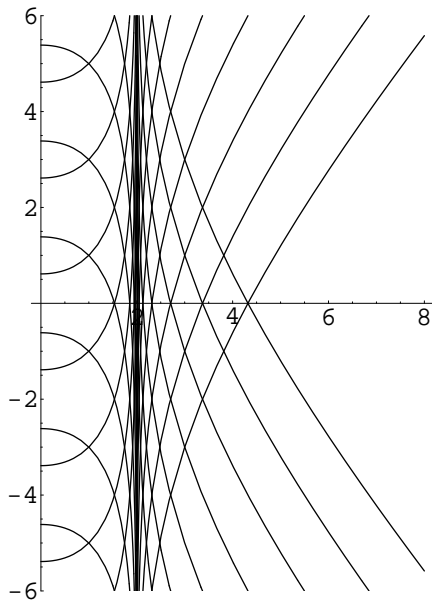


ABB. 2.3 u- und w-Linien der SSM

w-Linien: Wie oben gilt für auslaufende Lichtblitze:

$$\begin{aligned} t_w(r) &= \int_0^{t_w} d\tau = \int_{r_0}^r \frac{d\rho}{1 - \mathfrak{R}/\rho} \\ &= r + \mathfrak{R} \ln|r - \mathfrak{R}| + w \equiv r^* + w \end{aligned}$$

wobei die Integrationskonstante $w = -r_0 - \mathfrak{R} \ln|r_0 - \mathfrak{R}|$ ist.

u-Linien: Diese parametrisieren die einlaufenden Lichtblitze, die Rechnung ist identisch, nur muss das Vorzeichen geändert werden, so dass gilt:

$$t_u(r) = -r - \mathfrak{R} \ln|r - \mathfrak{R}| + u$$

mit $u = r_0 + \mathfrak{R} \ln|r_0 - \mathfrak{R}|$.

In der Abb. 2.3 sind die u- und w-Linien für $\mathfrak{R} = 2$ mit Mathematica gezeichnet. In dieser Zeichnung sind die Rechtskurven jeweils w-Linien, die Linkskurven sind die u-Linien. Die Scharen sind gezeichnet für die u- und w-Werte von $-3\mathfrak{R}$ bis $+3\mathfrak{R}$ in Schritten von $1\mathfrak{R}$.

An der Stelle $r = \mathfrak{R}$ haben alle eine senkrechte Asymptote. Damit kann kein Lichtblitz vom Inneren ($r < \mathfrak{R}$) in endlicher Zeit ins Äußere ($r > \mathfrak{R}$) oder umgekehrt wechseln.

Alle Weltlinien sich bewegnender Objekte laufen innerhalb ihrer Lichtkegel (vgl. dazu auch Abb. 1.6), denn der Abstand zweier beliebiger Ereignisse dieser Weltlinie muss zeitartig sein. In der SRT war der Lichtkegel durch die beiden Winkelhalbierenden bzw. deren Parallelen durch bestimmt, also durch eine w-Linie und eine u-Linie. Ein Ereignis E_2 liegt innerhalb des Lichtkegels von E_1 , wenn $\Delta s^2 > 0$ ist.

Für $r > \mathfrak{R}$ sind die Koeffizienten von Δt^2 und Δr^2 in Gl. (2.12) beide positiv, also ist auch $\Delta s^2 > 0$, wenn $\Delta t \neq 0$ und $\Delta r = 0$ ist. Deshalb ist das Innere der Lichtkegel nach oben (Zukunft) bzw. nach unten (Vergangenheit) gerichtet.

Ist $r < \mathfrak{R}$, dann sind beide Koeffizienten negativ, daher ist $\Delta s^2 > 0$, wenn $\Delta t = 0$ und $\Delta r \neq 0$ ist, damit sind die Lichtkegel nach rechts bzw. nach links gerichtet. Damit ist nun r die zeitartige und t die raumartige Koordinate. Da sich ein Körper aber nur innerhalb des Lichtkegels bewegen kann, muss r entweder stets zu- oder stets abnehmen. Ein Körper kann also innerhalb des Ereignishorizonts genauso wenig ruhen, wie ein Körper außerhalb des Ereignishorizonts die Zeit anhalten kann!

Aus diesen Überlegungen kann man zwar noch nicht folgern, dass ein Teilchen innerhalb des Ereignishorizonts sich unweigerlich in Richtung Zentrum bewegen

2. Zur Allgemeinen Relativitätstheorie

muss, es könnte sich auch unweigerlich radial nach außen bewegen müssen, aber man kann zeigen, dass erwartungsgemäß ein Teilchen innerhalb des Horizonts immer ins Zentrum stürzen muss.

2.3.2.3. Nochmal der Fall ins Schwarze Loch

Für einen frei fallenden Beobachter gilt die Bewegungsgleichung (2.14), also, wenn man $r(0) = 0$ setzt und damit *negative* τ verwendet, die die Eigenzeit *vor* dem Eintreffen bei $r = 0$ angeben:

$$\begin{aligned} \frac{dr(\tau)}{d\tau} &= -\sqrt{\frac{\mathfrak{R}}{r(\tau)}} \Rightarrow \sqrt{r(\tau)} \frac{dr}{d\tau} = -\sqrt{\mathfrak{R}} \Rightarrow \frac{2}{3}[r(\tau)]^{3/2} = -\tau \sqrt{\mathfrak{R}} \\ \Rightarrow r(\tau) &= \left(-\frac{3}{2}\tau \sqrt{\mathfrak{R}}\right)^{2/3} \Rightarrow \tau = -\frac{2}{3} \cdot r \sqrt{\frac{r}{\mathfrak{R}}} \end{aligned}$$

In dieser Rechnung tritt der Ereignishorizont $r = \mathfrak{R}$ nicht auf. Um aus der Entfernung $10\mathfrak{R}$ auf die Entfernung \mathfrak{R} zu fallen, braucht der Körper also die Eigenzeit:

$$\Delta\tau_1 = \tau(\mathfrak{R}) - \tau(10\mathfrak{R}) = -\frac{2}{3}(\mathfrak{R} - 10\mathfrak{R} \sqrt{10}) \approx 20,4\mathfrak{R}$$

Damit benötigt der Körper eine *endliche* Eigenzeit, während ein außenstehender Beobachter eine „einfrierende“ Bewegung beobachtet!

Um dann noch von $r = \mathfrak{R}$ nach $r = 0$ zu fallen braucht er die Zeit

$$\Delta\tau_2 = \tau(0) - \tau(\mathfrak{R}) = 0 + \frac{2}{3}\mathfrak{R} = \frac{2}{3}\mathfrak{R}$$

Für die Sonne mit $\mathfrak{R} = 3 \text{ km} = 3/c \text{ sec} = 10^{-5} \text{ s}$ sind diese Zeiten $\Delta\tau_1 = 204 \mu\text{s}$ und $\Delta\tau_2 = 6,7 \mu\text{s}$.

Entsprechend ergeben sich für ein schwarzes Loch von der Masse einer Galaxie (etwa 10^{11} Sonnenmassen) Werte von 236 bzw. 11,5 Tagen.

2.3.2.4. Bestimmung von $r(t)$

Die Eigenzeit τ des frei fallenden Körpers war nach den Ausführungen von Abschnitt 2.3.1, Gleichung (2.15)

$$\frac{d\tau}{dt} = 1 - \frac{\mathfrak{R}}{r}$$

Damit wird

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} = -\sqrt{\frac{\mathfrak{R}}{r}} \left(1 - \frac{\mathfrak{R}}{r}\right) \quad (2.17)$$

2.3.3. Phänomene am Ereignishorizont

Wir haben schon mehrfach gesehen, dass was man misst nicht unbedingt das sein muss, was man sieht.

Nun soll ein Körper von einer Sonnenmasse in ein schwarzes Loch von der Masse einer Galaxie stürzen. Dabei interessiert das Verhalten der Sonne nahe dem Ereignishorizont. Da vom feldfreien Beobachter aus gesehen der Ereignishorizont nie überschritten wird, ändert sich die r -Koordinate dort praktisch nicht mehr, man kann also $\Delta r = 0$ setzen.

Für den Zusammenhang zwischen t und τ gilt $\Delta\tau = K\Delta t$, weiter ist $r - \mathfrak{R} \ll \mathfrak{R}$.

Lichtblitze, die vom Körper bei r_e in dessen Eigenzeit $\Delta\tau_e$ emittiert werden, werden an jeder anderen Stelle in der Koordinatenzeit $\Delta t_0 = \Delta t_e$ empfangen. Für den feldfreien Beobachter ist, da $r \gg \mathfrak{R}$, $K = 1$ und somit $\Delta t_0 = \Delta\tau_0$. Somit kann man $t_0 = \tau_0$ setzen.

Sendet der fallende Stern Licht der Eigenfrequenz f_e aus, so wird dieses bei r_0 mit f_0 empfangen, wobei gilt:

$$\frac{f_0(t_e)}{f_e} = \frac{\Delta\tau_e}{\Delta\tau_0} = \frac{\Delta t_e}{\Delta t_0} \sqrt{1 - \frac{\mathfrak{R}}{r_e(t_e)}} = \sqrt{1 - \frac{\mathfrak{R}}{r_e(t_e)}}$$

also

$$f_0(t_e) = f_e \sqrt{1 - \frac{\mathfrak{R}}{r_e(t_e)}} \approx f_e \sqrt{\frac{r_e(t_e) - \mathfrak{R}}{\mathfrak{R}}}$$

Da hier $r \approx \mathfrak{R}$ ist, folgt weiter aus Gl. (2.17)

$$\frac{dr}{dt} = -\sqrt{\frac{\mathfrak{R}}{r}} \left(1 - \frac{\mathfrak{R}}{r}\right) = -\left(1 - \frac{\mathfrak{R}}{r}\right) = -c(r)$$

Dies zeigt, dass die Geschwindigkeit des fallenden Körpers in der Nähe des Ereignishorizonts fast gleich der Lichtgeschwindigkeit ist! Um nun t_e zu bestimmen, integriert man die obige Gleichung, wobei r_a ein fester Abstand ist, der nahe bei \mathfrak{R} liegt:

$$t_e = \int_0^t dt = - \int_{r_a}^r \frac{dr}{1 - \frac{\mathfrak{R}}{r}} = r_a - r + \mathfrak{R} \ln \frac{r_a - \mathfrak{R}}{r - \mathfrak{R}}$$

Falls $r \approx \mathfrak{R}$, überwiegt der \ln sehr stark, da er gegen Unendlich geht, also ist

$$t_e \approx \mathfrak{R} \ln \frac{r_a - \mathfrak{R}}{r - \mathfrak{R}} \quad \text{oder} \quad r - \mathfrak{R} \approx (r_a - \mathfrak{R}) e^{-t/\mathfrak{R}}$$

Setzt man dies in die Frequenzgleichung oben ein, so folgt:

$$f_0(t_e) = f_e \sqrt{\frac{r_e(r_e) - \mathfrak{R}}{\mathfrak{R}}} \approx f_e \sqrt{\frac{r_a - \mathfrak{R}}{\mathfrak{R}}} \exp\left(-\frac{t_e}{2\mathfrak{R}}\right) \sim \exp\left(-\frac{t_e}{2\mathfrak{R}}\right)$$

2. Zur Allgemeinen Relativitätstheorie

Die Frequenz nimmt also exponentiell ab. Dabei ist $2\mathfrak{R}$ der Abklingfaktor, also die Zeit, in der die Frequenz auf den e-ten Teil gesunken ist. Für ein schwarzes Loch von Sonnenmasse ist also der Abklingfaktor in der Größenordnung von 10^{-5} s.

Ein in ein schwarzes Loch stürzender Körper verschwindet also fast „schlagartig“. Um von der zu 500 nm gehörenden Frequenz $6 \cdot 10^{14}$ Hz auf Radiowellen mit ca 6 MHz runterzukommen, braucht man mit $e^x = 10^8$ dann $x = 18$ Abklingungen, das sind $18 \cdot 10^{-5}$ s $\approx 2 \mu$ s.

Bei einem schwarzen Loch von der Masse einer Galaxie ist der Abklingfaktor 10^{11} mal kleiner, man braucht also ca 11 Tage, bis die Frequenz auf den e-ten Teil gesunken ist.

2.4. Gravitation und Geometrie

ein Beobachter in der Nähe einer gravitierenden Masse misst statt der Länge Δr in Feldrichtung bekanntlich die Länge $\Delta \rho = K\Delta r$, quer dazu aber immer noch Δr . Ähnliche Verhältnisse kennt man von Landkarten: Höhenlinien werden in wahrer Größe abgebildet, während Falllinien verkürzt erscheinen. Die Ursache ist die „Krümmung“ der Landschaft. Die kürzeste Verbindung zweier Punkte ist nicht notwendig eine Gerade. (Fliegen gilt hier nicht!).

In der ART sind diese Strecken tatsächlich verlängert. Es ist eine Sache der Interpretation, ob man Längenänderung als solche nimmt, oder ob man sie als Ergebnis einer Krümmung der Raumzeit deutet.

2.4.1. Flammisches Paraboloid

Es soll nun versucht werden, die Form derjenigen Fläche zu finden, die dieselbe Geometrie hat, wie die Äquatorebene der Schwarzschildmetrik. Da die SSM rotationssymmetrisch ist, muss auch die gesuchte Fläche diese Gestalt haben. In großer Entfernung muss sie in eine „echte“ Ebene übergehen.

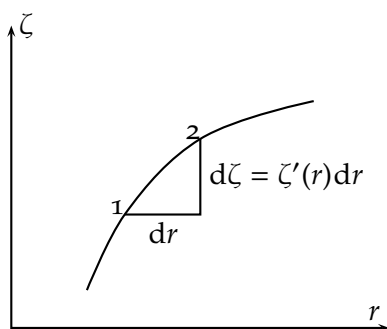


ABB.2.4 Zur Berechnung des Flammischen Paraboloids

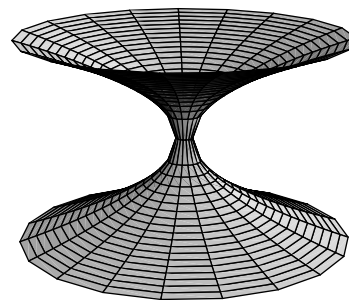


ABB. 2.5 Flammisches Paraboloid

In Abbildung 2.4 sei ζ die „Höhe“ der Fläche und $d\rho$ die Länge des gekrümmten Stücks 12. Im ζ - r -Koordinatensystem entnimmt man der Zeichnung:

$$d\rho^2 = dr^2 + d\zeta^2 = dr^2(1 + \zeta'(r)^2)$$

also

$$\frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{\mathfrak{R}}{r}}} = dr \sqrt{1 + \zeta'(r)^2} \Rightarrow \zeta'(r) = \sqrt{\frac{\mathfrak{R}}{r - \mathfrak{R}}} \Rightarrow \zeta(r) = 2\sqrt{\mathfrak{R}} \sqrt{r - \mathfrak{R}}$$

Notiz 2.8 Eine Schnittebene durch den Mittelpunkt der rotationssymmetrischen Masse M hat dieselben geometrischen Eigenschaften wie das FLAMMSche Paraboloid (vgl. Abb. 2.5) mit der Gleichung

$$\zeta(r) = 2\sqrt{\mathfrak{R}(r - \mathfrak{R})} \quad (2.18)$$

2.4.2. Die Krümmung von Flächen

Man kann Flächenstücke in drei Gruppen einteilen:

1. positiv gekrümmte Flächen.

Typische Vertreter sind Kugelstücke. Sie reißen, wenn man sie in die Ebene auswalzen will. Für einen Kreis auf einer Kugeloberfläche ist $u/d < \pi$ und die Winkelsumme im Dreieck ist größer als 180° .

2. negativ gekrümmte Flächen.

Typische Vertreter sind Sattelflächen oder die um die y -Achse rotierende „Lampenfusskurve“ $y = 1/x^2$. Will man sie flach walzen, so werfen sie Falten. Für einen Kreis auf solch einer Fläche gilt $u/d > \pi$ und die Winkelsumme im Dreieck ist kleiner als 180° .

3. ebene Flächen.

Auf ihnen gilt die gewöhnliche euklidische Geometrie.

Man kann die Krümmungen auch so unterscheiden:

Legt man in einen Punkt P der Fläche die Krümmungskreise mit dem größten und dem kleinsten Radius, dann ist die Fläche positiv gekrümmt, wenn beide Kreismittelpunkte auf derselben Seite der Fläche liegen. Sonst hat man negativ gekrümmte Flächen. (Ebenen sind uninteressant)

Die Ausführungen zeigen, dass das Flammsche Paraboloid negativ gekrümmt ist.

2. Zur Allgemeinen Relativitätstheorie

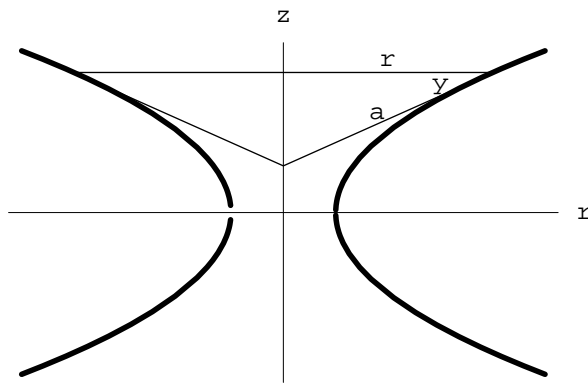


ABB. 2.6 Tangentialkegel ans Flammsche Paraboloid

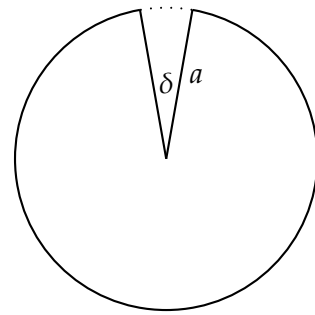


ABB. 2.7 Der ausgewickelte Kegel

2.4.3. Periheldrehung der Merkurbahn

Qualitativ kann man nun auch die Periheldrehung des Merkur verstehen. In Abbildung 2.6 nehmen wir an, dass sich der Planet auf einer Bahn mit Radius r bewegt. Breitet man nun den Tangentialkegel, auf dem sich der Planet bewegt, in die Ebene aus, so bleibt ein Stück übrig, was die Periheldrehung verursacht.

Der Neigungswinkel des Tangentialkegels ist $\psi = \zeta'(r)$. Der fehlende Winkel δ ist bestimmt durch:

$$a(2\pi - \delta) = 2\pi r = 2\pi a \cos \psi \approx 2\pi a(1 - \psi^2/2)$$

und

$$2\pi - \delta = 2\pi - \pi\psi^2/2 \Rightarrow \delta = \pi\psi^2/2 = \frac{4\pi\mathfrak{R}^2}{4\pi(r - \mathfrak{R})} = \frac{\pi\mathfrak{R}}{r - \mathfrak{R}} \approx \frac{\pi\mathfrak{R}}{r}$$

Dieser Wert ist nur ein Drittel des exakten Wertes, den man mit den Einsteinschen Feldgleichungen bekommt, das liegt daran, dass wir nur die Krümmung des Raums berücksichtigt haben, aber nicht nur der Raum, sondern die Raumzeit ist gekrümmt.

A. Vierervektoren

In diesem Kapitel ist wieder durchgängig $c = 1$ gesetzt.

A.1. Metrik des Minkowski-Raums

In Abschnitt 1.1.6 haben wir gesehen, dass der Ausdruck $\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$ unter Lorentztransformationen unverändert bleibt. Nun betrachten wir ein Ereignis $\mathcal{X} = (t, x, y, z) = (t; \mathbf{r})$ als einen „Ortsvektor“ im vierdimensionalen Minkowskiraum. Dann kann man in Analogie zum dreidimensionalen Raum, in dem die Länge $\Delta r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$ einer Vektordifferenz unter Drehungen und Translationen der Koordinaten unverändert bleibt, den Ausdruck $\Delta \mathcal{X}^2 = \Delta t^2 - \Delta r^2$ als „Länge“ des Vierervektors $\Delta \mathcal{X}$ auffassen, die unter Lorentztransformationen invariant bleibt. Dazu müssen wir im Minkowski-Raum eine Metrik definieren. Dies geht wie im dreidimensionalen durch Definition eines Skalarprodukts, mittels dessen im \mathbb{R}^3 Längen und Winkel berechnet werden können.

Eine allgemeine Lorentztransformation setzt sich aus räumlichen Verschiebungen und Drehungen und den speziellen Lorentztransformationen aus Gl. (1.4) zusammen. Unter räumlichen und zeitlichen Verschiebungen bleiben die Komponente von $\Delta \mathcal{X}$ unverändert, unter räumlichen Drehungen bleibt die Zeitkomponente von \mathcal{X} unverändert; unter einer speziellen LT ändern sich nun die Zeit- und die x-Komponente. Jeden Vektor $\mathcal{V} = (V_0, V_1, V_2, V_3)$ der dieselben Transformationseigenschaften aufweist wie $\Delta \mathcal{X}$, nennt man einen *Vierervektor*.

Die *Norm* („Betrags“) des Vierervektors definiert man nun über:

$$\mathcal{V}^2 = V_0^2 - V_1^2 - V_2^2 - V_3^2 \quad \Rightarrow \quad |\mathcal{V}| = \sqrt{\mathcal{V}^2} \quad (\text{A.1})$$

und als *Skalarprodukt* der Vierervektoren \mathcal{V} und \mathcal{W}

$$\mathcal{V} \cdot \mathcal{W} = V_0 W_0 - V_1 W_1 - V_2 W_2 - V_3 W_3 \quad (\text{A.2})$$

Dann gilt analog zum dreidimensionalen Fall $\mathcal{V}^2 = \mathcal{V} \cdot \mathcal{V}$. Man beachte, dass \mathcal{V}^2 auch negativ sein kann!

Dieses Skalarprodukt verhält sich wie ein normales Skalarprodukt im \mathbb{R}^3 , es gelten die üblichen Rechenregeln:

$$\mathcal{V} \cdot \mathcal{W} = \mathcal{W} \cdot \mathcal{V} \quad \mathcal{U} \cdot (\mathcal{V} + \mathcal{W}) = \mathcal{U} \cdot \mathcal{V} + \mathcal{U} \cdot \mathcal{W} \quad d(\mathcal{V} \cdot \mathcal{W}) = d\mathcal{V} \cdot \mathcal{W} + \mathcal{V} \cdot d\mathcal{W}$$

A. Vierervektoren

Weiter gilt die folgenden wichtigen Regeln:

Notiz A.1 *Das Skalarprodukt zweier Vierervektoren ist invariant, hat also in allen Inertialsystemen denselben Wert.*

Dazu braucht man nur den invarianten Ausdruck $(\mathcal{V} + \mathcal{W})^2 = \mathcal{V}^2 + 2\mathcal{V} \cdot \mathcal{W} + \mathcal{W}^2$ zu betrachten. Alle Normen (Quadrate) in diesem Ausdruck ändern sich bei Bezugssystemwechsel nicht, also kann sich auch das Skalarprodukt nicht ändern.

Notiz A.2 *Ist eine bestimmte Komponente eines Vierervektors \mathcal{V} in allen Bezugssystemen Null, dann ist der Vierervektor selbst der Nullvektor.*

Nimmt man nämlich an, eine räumliche Koordinate (z. B. V_1) sei in allen Systemen Null und etwa V_2 sei von Null verschieden, dann kann man die Achsen so drehen, dass nun V_1 von Null verschieden wird, was der Annahme, dass V_1 immer Null sei widerspricht; ist aber die Zeitkoordinate von Null verschieden, dann gibt es ein Inertialsystem, in dem V_1 ungleich Null ist. Ist die zeitliche Koordinate V_0 immer Null und eine räumliche von Null verschieden, dann kann man eine Lorentztransformation ausführen, die der Zeitkomponente einen von Null verschiedenen Wert verleiht.

Zur Bezeichnung: Häufig schreibt man Vierervektoren in der Form

$$\mathcal{V} = (V_0; \mathbf{V})$$

fasst also die räumlichen Komponenten zu einem gewöhnlichen Vektor zusammen. Dann kann man schreiben:

$$\mathcal{V} \cdot \mathcal{W} = V_0 W_0 - \mathbf{V} \cdot \mathbf{W} \quad \text{und} \quad \mathcal{V}^2 = V_0^2 - \mathbf{V}^2$$

wo dann zwischen den räumlichen Vektoren das übliche Skalarprodukt zu verwenden ist.

A.2. Vierergeschwindigkeit und -Beschleunigung

$ds^2 = d\tau^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ ist ja für zeitartige Vorgänge gerade das Quadrat der Eigenzeit. Deshalb können wir den Vierervektor

$$\mathcal{U} = \frac{d\mathcal{X}}{d\tau} = \left(\frac{dt}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau} \right) = k(u)(1; \mathbf{u}) \quad (\text{A.3})$$

definieren. Bezeichnet \mathcal{X} den Ort eines sich mit Geschwindigkeit \mathbf{u} bewegenden Teilchens, dann sind die letzten drei Komponenten die seiner Eigengeschwindigkeit, die erste ist der Lorentzfaktor der Geschwindigkeit. Damit ist – weil man den ja nur den Vierervektor $\Delta\mathcal{X}$ durch die invariante Eigenzeit geteilt hat – \mathcal{U} ebenfalls

ein Vierervektor. Er heißt *Vierergeschwindigkeit*. \mathcal{U} kann als Tangentialvektor der Weltlinie des Teilchen betrachtet werden.

Entsprechend bekommt man nun die Viererbeschleunigung des Teilchens durch Ableiten der Vierergeschwindigkeit nach der invarianten Eigenzeit:

$$\mathcal{A} = \frac{d\mathcal{U}}{d\tau} = \frac{d^2\mathcal{X}}{d\tau^2} \quad (\text{A.4})$$

Mit

$$\mathcal{A} = \frac{d\mathcal{U}}{d\tau} = k \frac{d\mathcal{U}}{dt} = k \frac{d}{dt}(k; k\mathbf{u}) = k \left(\frac{dk}{dt}; \frac{dk}{dt}\mathbf{u} + k\mathbf{a} \right)$$

bekommt man einen Zusammenhang zwischen Viererbeschleunigung und der räumlichen Beschleunigung \mathbf{a} . Im momentanen Ruhssystem ($\mathbf{u} = \mathbf{0}$) ist $k = 1$, deshalb verschwinden die Ableitungen von k und es ist dann $\mathcal{A} = (0; \mathbf{a})$. Bildet man in diesem momentanen Ruhssystem das Skalarprodukt $\mathcal{U} \cdot \mathcal{A}$, so erhält man ersichtlich Null. Da das Skalarprodukt invariant ist, gilt in allen Inertialsystemen:

$$\mathcal{U} \cdot \mathcal{A} = 0 \quad \text{und} \quad \mathcal{U}^2 = 1 \quad (\text{A.5})$$

wobei letzteres direkt aus Gleichung (A.3) folgt.

A.3. Viererimpuls

Mit Hilfe der invarianten Vierergeschwindigkeit und der Ruhmasse m_0 definieren wir nun den *Viererimpuls*:

$$\mathcal{P} = m_0 \mathcal{U} = m_0 k(u)(1; \mathbf{u}) = (m; \mathbf{p}) = (m; m\mathbf{u}) \quad (\text{A.6})$$

Der Viererimpuls fasst also die Energie (Masse) m und den dreidimensionalen Impuls \mathbf{p} zusammen. Energiesatz und Impulssatz vereinigen sich so zum Satz von der Erhaltung des Viererimpulses.

Bildet man das Quadrat von \mathcal{P} , dann bekommt man wegen $\mathcal{U}^2 = 1$ die Gleichung:

$$\mathcal{P}^2 = m_0^2 = m^2 - p^2 \quad \Rightarrow \quad m^2 = m_0^2 + p^2$$

Das ist die Energie-Impuls-Beziehung von Gl. (1.16)

Für zwei Teilchen mit den Viererimpulsen \mathcal{P}_1 und \mathcal{P}_2 bekommt man für das Skalarprodukt der Viererimpulse, wenn sich die Teilchen mit v relativ zueinander bewegen (man beachte, dass man wegen der Invarianz des Skalarprodukts ein Bezugssystem wählen kann, in dem Teilchen 1 ruht, sein Viererimpuls ist dann einfach durch $(m_{01}, \mathbf{0})$ gegeben):

$$\mathcal{P}_1 \cdot \mathcal{P}_2 = m_{01} m_2 = m_1 m_{02} = k(v) m_{01} m_{02} \quad (\text{A.7})$$

A. Vierervektoren

Elastischer Stoß: Dieser ist dadurch gekennzeichnet, dass die Ruhmassen der beteiligten Teilchen vor und nach dem Stoß unverändert sind. Dann gilt, wenn \mathcal{P} und \mathcal{Q} die Viererimpulse vor dem Stoß sind (die nach dem Stoß bekommen Striche), wegen

$$\mathcal{P} + \mathcal{Q} = \mathcal{P}' + \mathcal{Q}' \Rightarrow \mathcal{P}^2 + 2\mathcal{P} \cdot \mathcal{Q} + \mathcal{Q}^2 = \mathcal{P}'^2 + 2\mathcal{P}' \cdot \mathcal{Q}' + \mathcal{Q}'^2$$

Da aber wegen der unveränderten Ruhmassen $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}'^2$ und $\mathcal{Q}^2 = \mathcal{Q}'^2$ gelten muss gilt die Bedingung für elastische Stöße:

$$\mathcal{P} \cdot \mathcal{Q} = \mathcal{P}' \cdot \mathcal{Q}' \quad (\text{A.8})$$

Compton-Effekt: Ein Photon hat die Ruhmasse Null und bewegt sich immer mit Lichtgeschwindigkeit. Seine Energie ist $m = hf$, sein Impuls $p = h/\lambda = hf/c = hf$. Sein Viererimpuls ist also $\mathcal{P} = hf(1; \mathbf{n})$, wo \mathbf{n} der Einheitsvektor in Flugrichtung ist. Für diesen Vierervektor gilt $\mathcal{P}^2 = 0$, obwohl $\mathcal{P} \neq 0$ ist, das liegt daran, dass im Skalarprodukt von Vierervektoren auch Minuszeichen auftreten, das passiert beim gewöhnlichen Skalarprodukt nicht.

Für das Skalarprodukt der Viererimpulse zweier Photonen gilt:

$$\mathcal{P}_1 \cdot \mathcal{P}_2 = hf_1 hf_2 (1 - \mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2) = h^2 f_1 f_2 (1 - \cos \phi)$$

wo ϕ der Winkel zwischen den Einheitsvektoren \mathbf{n}_1 und \mathbf{n}_2 ist.

Beim Compton-Effekt trifft ein hochenergetisches Photon (kurzwelliges Gamma-Quant) auf ein praktisch ruhendes Elektron, dabei wird es abgelenkt und ändert seine Energie, also seine Frequenz. Nun sei \mathcal{Q} Viererimpuls des Elektrons. θ sei der Winkel um den das Photon aus seiner Ausgangsrichtung abgelenkt wird. Nach dem Stoß bekommen die Viererimpulse Striche. Dann gilt $\mathcal{P} + \mathcal{Q} = \mathcal{P}' + \mathcal{Q}'$. Daraus folgt $\mathcal{Q}'^2 = (\mathcal{P} + \mathcal{Q} - \mathcal{P}')^2$. Zunächst ist ja $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}'^2 = 0$ und $\mathcal{Q}^2 = \mathcal{Q}'^2 = m_0^2$ nach Definition. Beachtet man dies beim Ausmultiplizieren, dann bekommt man:

$$\mathcal{P} \cdot \mathcal{Q} - \mathcal{P}' \cdot \mathcal{Q} - \mathcal{P} \cdot \mathcal{P}' = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P} \cdot \mathcal{P}' = \mathcal{Q} \cdot (\mathcal{P} - \mathcal{P}')$$

Links steht das Produkt der Viererimpulse zweier Photonen, also gilt:

$$h^2 f f' (1 - \cos \theta) = (m_0; 0) \cdot (h(f - f'); hf\mathbf{n} - hf'\mathbf{n}') = m_0 h (f - f')$$

Kürzt man hier h , ersetzt die f mit $\lambda f = c = 1$ durch $1/\lambda$ und beachtet $\cos \theta = 1 - 2 \sin^2(\theta/2)$, dann bekommt man den bekannten Ausdruck:

$$\frac{h}{\lambda \lambda'} 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = m_0 \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right) \quad \Rightarrow \quad \lambda' - \lambda = \frac{2h}{m_0} \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

B. Aufgaben und Lösungen

B.1. Aufgaben

AUFGABE 1 Die Länge eines Raumschiffs B werde von der Besatzung zu 300 m ermittelt. Es bewegt sich mit $v = 0,6c$ an der Raumstation A vorbei. In dem Augenblick, in dem der Bug des Raumschiffs A passiert, wird dort ein Lichtblitz ausgesandt, der am Raumschiffsende reflektiert wird.

- Welche Länge ermittelt A für das Raumschiff B?
- Zeichne in ein Weltdiagramm (senkrechte Achsen für A), die Weltlinien für Bug und Heck des Raumschiffs und die Lichtlinien der Lichtsignale ein.
- Welche Zeit ermitteln A und B jeweils für die Rückkehr des reflektierten Lichtblitzes zur Raumschiffspitze?
- Wann kommt der Lichtblitz wieder an A vorbei?
- Welchen Zeitpunkt ermitteln A und B für das Ereignis der Reflexion?

AUFGABE 2 In einem Zyklotron sollen Deuteronen auf eine Geschwindigkeit von $0,8c$ gebracht werden. Vor dem Austritt soll eine Bahn von 3 m Radius durchlaufen werden.

- Wie groß muss die Flussdichte B sein ohne relativistische Rechnung?
- Wie lange dauert also ein Umlauf?
- Um welchen Faktor hat sich die Masse in Wirklichkeit vergrößert?
- Auf welchen Endwert muss also B erhöht werden, damit die Deuteronen immer noch eine Kreisbahn von 3 m machen?
- Welche kinetische Energie erhalten die Deuteronen?
- Welche Spannung müsste ein Deuteron durchlaufen, um diese kinetische Energie zu erreichen?

AUFGABE 3 Berechne die Ruhenergie eines Elektrons in Joule und in eV.

AUFGABE 4 Ein Proton habe eine Gesamtenergie von 3 GeV. Berechne den Anteil der kinetischen Energie, seine Geschwindigkeit und das Verhältnis seiner Masse

B. Aufgaben und Lösungen

zu seiner Ruhmasse. Wie groß muss die magnetische Flussdichte sein, um so ein Proton auf einer Kreisbahn von 1,5 km Umfang zu halten.

AUFGABE 5 Die Strahlungsleistung der Sonne beträgt in unseren Breiten etwa $0,5 \text{ kW/m}^2$. Wie groß ist die Masse der innerhalb von 10 Stunden auf 100 m^2 einstrahlten Strahlungsenergie.

AUFGABE 6 Folgende Nuklidmassen sind sehr genau bekannt:

Proton: $1,007277 \text{ u}$; Neutron: $1,008665 \text{ u}$; Helium-4: $4,001506 \text{ u}$.

Berechne den Massendefekt bei der Bildung des Heliums. Welche Energie wird also bei der Fusion eines Heliumkerns frei?

AUFGABE 7 Ein feindliches Raumschiff nähert sich einer Beobachtungsstation auf einem Planetoiden. Es fliegt relativ zur Station mit $v = 0,6c$. Im Augenblick des Vorbeiflugs wird es von der Station mit zwei synchron ausgelösten Laserstrahlen beschossen, die praktisch im gleichen Augenblick auf das Raumschiff treffen. Die Laser haben einen Abstand von 20 m.

- Welchen Abstand der Einschusslöcher misst die Schiffsbesatzung?
- Der Abstand der Einschusslöcher, wie ihn die Besatzung misst, ist größer als 20 m. Berücksichtigt man, dass wegen der Längenkontraktion vom Schiff aus der Abstand der Laser verkürzt ist, so müsste der Abstand der Löcher vom Schiff aus weniger als 20 m sein. Löse diesen Widerspruch.

AUFGABE 8 Eine Raumschiffregatta: Teilnehmer sind die Raumschiffe Gans und Ente. Die Rennstrecke ist Erde – α -Centauri und zurück. Entfernung 4 LJ (Lichtjahre). Wegen Triebwerkschadens muss die Ente bei α -Centauri notlanden. Für die Reparatur benötigt die Ente nach ihrer Eigenzeit 4 a (Jahre). Danach fliegt sie ohne Störung zurück. Die Gans steht die Regatta ohne Störung durch. Beschleunigungsvorgänge werden bei der Rechnung nicht beachtet.

- Die Geschwindigkeiten der Raumschiffe werden von der Erde aus mit Radar gemessen. Zur Zeit $t = 1 \text{ h}$ wird ein Radarsignal ausgesandt, das von der Gans um 4 h und von der Ente um 9 h zurückkommt. Zeige, dass die Geschwindigkeiten von Gans und Ente $0,6c$ bzw. $0,8c$ sind.
- Wann traf der Radarimpuls auf Gans bzw. Ente nach deren Bordzeit jeweils ein?
- Die Schiffsbesatzungen messen ihre Relativgeschwindigkeiten ebenfalls mit Radar. Welche Werte erhalten sie?
- Wann kommen die Raumschiffe auf α -Centauri nach Erdzeit und nach Bordzeit jeweils an?
- Wie beurteilen die Besatzungen jeweils die Entfernung Erde – α -Centauri? (in Lichtjahren).

- f) Beide Besatzungen schicken sofort nach Erreichen des Ziels je ein Funksignal zur Erde. Wann kommt es nach Bordzeit jeweils an?
- g) Nach der Rückkehr auf der Erde gibt es Streit, wer die Regatta gewonnen hat. Es gibt zwei Meinungen:
 - 1. Das Raumschiff hat gewonnen, das nach der Erduhr die kürzeste Zeit benötigte.
 - 2. Das Raumschiff hat gewonnen, da nach seiner Bordzeit am wenigsten Zeit benötigte.

Wer hat nach welcher Regel gewonnen?

AUFGABE 9 Mit dem Raumschiff Antares, das $v_1 = 12/13c$ erreicht, soll mit einer 18 Jahre alten Mannschaft zu einem 96 Lichtjahre entfernten Ziel geflogen werden.

- a) Nach wieviel Jahren hat die Antares die „letzte Wendemarke“ erreicht, nach deren Überqueren die Mannschaft nicht mehr lebend zur Erde zurückkehren kann (Lebenserwartung sei 78 Jahre)? Welcher Abstand von der Erde ist das?
- b) Funksignale sollen von Raumschiff und Erde mit der Frequenz f_0 empfangen werden. Mit welcher Frequenz muss man dann senden?
- c) Wie lange braucht die Antares zum Erreichen des Ziels nach Erdzeit und nach Bordzeit?
- d) Sechs Jahre nach dem Start der Antares gelingt der Bau des Raumschiffs Wega, die $24/25c$ erreicht. Die Wega startet sofort mit einer ebenfalls 18-jährigen Mannschaft zum Zielgebiet. Nach welcher Flugzeit (in Erd- und Bordjahren) wird der Zielort erreicht. Wird die Mannschaft leben zur Erde zurückkehren können?
- e) Antares wird sofort über Funk vom Start der Wega unterrichtet. Zeige, dass diese Nachricht die Antares genau an der „letzten Wendemarke“ erreicht.
- f) Die Antares-Mannschaft steht nun vor der Entscheidung, sofort umzukehren, oder auf die Wega zu warten und auf sie umzusteigen. Im ersten Fall käme die Mannschaft im Greisenalter auf der Erde an und hätte Jahrzehnte sinnlos im Raumschiff verbracht. Im zweiten Fall könnte sie mit der Wega weiterfliegen und hätte die Chance außerirdische Lebensformen zu entdecken. Man entscheidet sich für die zweite Möglichkeit. Der Entschluss wird sofort zur Wega gefunkt. Mit welcher Frequenz muss man senden, wenn auch die Wega ihren Empfänger auf f_0 eingestellt hat?
- g) Wie lange muss die Antares bei der „letzten Wendemarke“ auf die Wega warten?
- h) Während der Wartezeit überfällt die Mannschaft der Antares unerträgliches Heimweh. Man beschließt, die Mannschaft der Wega zur Heimkehr zu überreden. Die Mannschaft der Wega findet das ganze Unternehmen ebenfalls

B. Aufgaben und Lösungen

überaus eintönig, so dass man zusammen auf der Wega zurückfliegt. Wie alt sind die Mannschaften bei der Rückkehr und wieviel Erdjahre sind seit dem Start vergangen?

AUFGABE 10 Relativ zu einem System S mit Ursprung A bewege sich ein System S' mit Ursprung B und der Geschwindigkeit $v = 0,6c$ in Richtung zunehmender x -Werte. Ein zur S -Zeit $t_1 = 0,20$ s ausgesandtes Lichtsignal passiere B zur S' -Zeit t'_1 , wird an einem Spiegel im Ereignispunkt P zur S -Zeit $t_P = 1,3$ s reflektiert, trifft in B zur S' -Zeit t'_2 und in A zur S -Zeit t_2 ein.

- Stelle den Vorgang in einem Minkowski-Diagramm dar. Wähle rechtwinklige Achsen für S und 5 cm für 1 s.
- Ergänze das Weltdiagramm durch die Gleichzeitigkeitlinie bez. S' durch P und die Ortsachse von S' . Trage die Koordinaten von P auf den Achsen ein.
- Berechne die Ankunftszeit t_2 des Lichtsignals in A und die Ortskoordinate x_P des Reflexionspunktes in S . Ermittle die Zeitpunkte t'_1 und t'_2 in denen das Lichtsignal B passiert.
- Berechne die Koordinaten von P in S' .
- Der Spiegel bewege sich nun bez. S mit der Geschwindigkeit u . Zur Zeit $t_Q = 1,8$ s wird sein Ort zur $x_Q = 1,2$ Ls bestimmt. Trage die Weltlinie des Spiegels in das Weltdiagramm ein. Berechne die Geschwindigkeit u bez. S und u' bez. S' . Deute das negative Vorzeichen von u' .

AUFGABE 11 Myonen sind instabile Teilchen, die beim Eindringen kosmischer Strahlen in die Erdatmosphäre entstehen. Ruhende Myonen haben eine Halbwertszeit von $1,5 \mu\text{s}$. Nach klassischer Rechnung wären von 10000 Myonen, die sich aus 2 km Höhe zur Erdoberfläche bewegen dort nur noch 440 Myonen übrig. Tatsächlich erreichen im Mittel 6450 Myonen die Erdoberfläche. Erläutere diesen Widerspruch durch Rechnung. ($v = 0,99c$)

AUFGABE 12 Ein bewegtes Teilchen der Ruhmasse m_0 besitze zunächst die kinetische Energie $E_{\text{kin}} = m_0c^2$ bis es vollkommen unelastisch mit einem anfänglich ruhenden Teilchen zusammenstößt, das ebenfalls die Ruhmasse m_0 hat. Berechne die Ruhmasse des nach dem Stoß entstandenen Teilchens.

B.2. Lösungen

k bezeichnet immer den Lorentzfaktor, D den Dopplerfaktor.

Lös. ZU AUFG. 1 $v = 0,6c$; $k = 1,25$; $D = 2$; $L_0 = 300 \text{ m} = 1 \mu\text{Ls}$ (in S').

- $L = L_0/k = 240 \text{ m}$
- weggelassen
- in S' : $t' = 2L_0 = 2 \mu\text{s}$; in S : $t = kt' = 2,5 \mu\text{s}$
- Sendeintervall 0 bis t_A , Empfangsintervall 0 bis $2 \mu\text{s} \Rightarrow t_A = \frac{2 \mu\text{s}}{D} = 1 \mu\text{s}$
- Reflexion ist immer in der Mitte, also in S : $0,5 \mu\text{s}$; in S' : $1 \mu\text{s}$

Lös. ZU AUFG. 2 $k = 5/3 \approx 1,67$; $m_0 \approx 2 \text{ u} = 3,32 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

- $\frac{v}{r} = \frac{e}{m} B_0 \Rightarrow B_0 = \frac{mv}{er} = 1,67 \text{ T}$
- $\omega = v/r = 8 \cdot 10^7 \text{ rad/s} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 7,85 \cdot 10^{-8} \text{ s}$
- $m = \frac{5}{3} m_0$
- $B = kB_0 = 2,78 \text{ T}$
- $E_{\text{kin}} = m - m_0 = \frac{2}{3} m_0 = 2,21 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 2 \cdot 10^{-10} \text{ J} = 1,24 \text{ GeV}$
- $eU = E_{\text{kin}} \Rightarrow U = 1,25 \text{ GV}$

Lös. ZU AUFG. 3 $E = mc^2 = 8,19 \cdot 10^{-14} \text{ J} = 0,511 \text{ MeV}$

Lös. ZU AUFG. 4 $m_0 = 1 \text{ u} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 1,5 \cdot 10^{-10} \text{ J} = 0,934 \text{ GeV}$. Auf die kin. Energie entfallen also $E_{\text{kin}} = 2,07 \text{ GeV}$. Der Lorentzfaktor ist somit $k = m/m_0 = 3/0,934 = 3,21 \Rightarrow v^2 = 1 - 1/k^2 \Rightarrow v = 0,95c$. Aus $B = mv/(er)$ folgt nun $B = 6,33 \text{ mT}$

Lös. ZU AUFG. 5 $m = E/c^2 = 500 \cdot 100 \cdot 10 \cdot 3600/c^2 = 0,02 \mu\text{g}$

Lös. ZU AUFG. 6 $5,04 \cdot 10^{-29} \text{ kg} = 28 \text{ MeV}$

Lös. ZU AUFG. 7

- Von der Station erfolgen die Schüsse gleichzeitig im Abstand 20 m . Vom Raumschiff aus mit der Lorentztransformation: $x'_2 - x'_1 = k(x_2 + vt) - k(x_1 + vt) = k(x_2 - x_1) = 1,25 \cdot 20 \text{ m} = 25 \text{ m}$.
- Die Laser haben vom Raumschiff aus wegen der Längenkontraktion den Abstand $L = 20/k = 16 \text{ m}$. Aber der Abschuss erfolgt für das Raumschiff *nicht* gleichzeitig. Die Ereignisse der Abschüsse haben die Koordinaten:
in S : $(0|0)$ und $(0|20)$. in S' : $t'_1 = 0$; $t'_2 = k(t + vx) = 1,25(0 + 0,6 \cdot 20/c) = 50 \text{ ns}$
In dieser Zeit werden $0,6c \cdot 50 \text{ ns} = 9 \text{ m}$ zurückgelegt. Das ist gerade der Unterschied zwischen den scheinbar widersprüchlichen 25 m und 16 m .

B. Aufgaben und Lösungen

Lös. ZU AUFG. 8

- a) Sendeintervall ist 1 h. Das Empfangsintervall ist damit:
Gans: $4 \text{ h} = D^2 \cdot 1 \text{ h} \Rightarrow D_G = 2 \Rightarrow v_G = 0,6 \Rightarrow k_G = 1,25$
Ente: $9 \text{ h} = D^2 \cdot 1 \text{ h} \Rightarrow D_E = 3 \Rightarrow v_E = 0,8 \Rightarrow k_E = 5/3$
- b) $t_G = D_G \cdot 1 \text{ h} = 2 \text{ h}$ und entsprechend $t_E = 3 \text{ h}$
- c) $D_G D_{GE} = D_E \Rightarrow D_{GE} = 1,5 \Rightarrow v_{GE} = 5/13$.
- d) Erdzeit: $t_G = 4/0,6 = 6\frac{2}{3} \text{ a}$; $t_E = 4/0,8 = 5 \text{ a}$. Nach Bordzeit ist der Zeitraum je um den Faktor k kleiner, also gilt dann für Gans $5\frac{1}{3} \text{ a}$ und 3 a für Ente.
- e) Die Entfernung wird lorentzkontrahiert gesehen, also $4/k = 3,2 \text{ LJ}$ für Gans und $2,4 \text{ LJ}$ für Ente.
- f) Gans: $6\frac{2}{3} + 4 = 10\frac{2}{3} \text{ a}$; Ente: $5 + 4 = 9 \text{ a}$
- g) Nach Erdzeit war Gans $2 \cdot 6\frac{2}{3} = 13\frac{1}{3}$ Jahre und Ente $5 \cdot 2 + 4 = 14$ Jahre unterwegs. Nach Bordzeit dagegen Gans $2 \cdot 5\frac{1}{3} = 10\frac{2}{3}$ Jahre und Ente $3 \cdot 2 + 4 = 10$ Jahre.

Lös. ZU AUFG. 9 Antares: $v = 12/13$; $k = 2,6$; $D = 5$; Wega: $v = 24/25$; $k = 25/7$; $D = 7$. (Alle Zeiten in Jahren und alle Entfernungen in Lichtjahren)

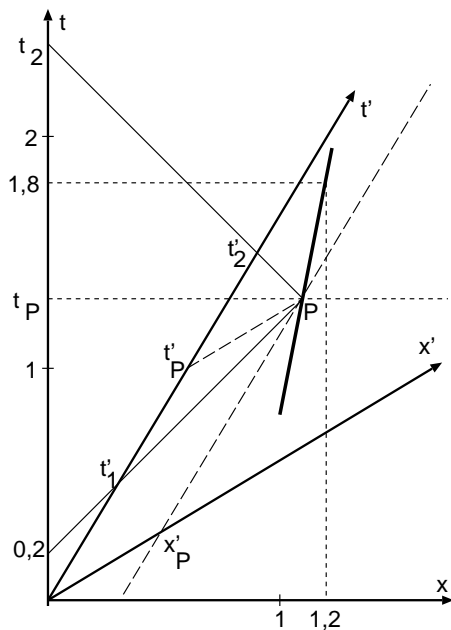
- a) Bordjahre: $(78 - 18)/2 = 30$; Erdjahre: $30k = 30 \cdot 2,6 = 78$. Abstand von der Erde dann $78 \cdot 12/13 = 72$
- b) Dopplerfaktor: $D = T_E/T_S = f_S/f_E \Rightarrow f_S = Df_E = 5 \cdot f_0$
- c) Erdjahre: $96/v = 104$; Bordjahre: $104/k = 40$.
- d) Erdjahre: $96/v = 100$; Bordjahre: $100/k = 28$. Das Alter bei der Rückkehr ist somit $18 + 2 \cdot 28 = 74$, also lebend.
- e) Sendeintervall: 6, also Empfangsintervall $D \cdot 6 = 30$ (Bordzeit)
- f) Die Relativgeschwindigkeit erhält man über den Dopplerfaktor aus

$$D(A) = D(WA)D(W) \Rightarrow D(WA) = 5/7$$

(Die Raumschiffe nähern sich einander, also muss $D < 1$ sein). Die Sendefrequenz ist dann $f = 5/7 \cdot f_0$.

- g) Nach Erdjahren: $6 + 72/v_W - 78 = 3$. Nach Bordjahren ergibt sich dasselbe, da Antares während des Wartens bez. Erde ruht.
- h) Flugzeit der Wega für eine Strecke ist $72/v = 75$ (Erdzeit), also $75/k = 21$ (Bordzeit). Für die Antares ist das Alter: $18 + 30 + 3 + 21 = 72$ Für die Wega ist das Alter: $18 + 2 \cdot 21 = 60$ Erdzeit seit Start der Antares: $6 + 2 \cdot 75 = 156$

Lös. ZU AUFG. 10 $v = 0,6$; $k = 1,25$; $D = 2$ (Zeiten in Sekunden, Längen in Lichtsekunden)



- a) siehe nebenstehende Abb.
 b) siehe nebenstehende Abb.
 c) Aufgrund der Rechtwinkligkeit der Lichtstrahlen ist $t_2 = 2t_p - 0,2 = 2,4$. Die Ortskoordinate ist dann
 $x_p = t_p - 0,2 = 1,1$.
 $t'_1 = D \cdot 0,2 = 0,4$ und $t'_2 = t_2/D = 1,2$
 d) Lorentztransformation:
 $x'_p = k(x_p - vt_p) = 0,4$
 $t'_p = k(t_p - vx_p) = 0,8$
 e) $u = \frac{1,2 - 1,1}{1,8 - 1,3} = 0,2$ (bez. S)
 bez. S' : $u = \frac{v + u'}{1 + vu'} \Rightarrow 0,2 = \frac{0,6 + u'}{1 + 0,6u'}$
 Somit $u' = -5/11$
 (Der Spiegel nähert sich B)

Lös. ZU AUFG. 11 $v = 0,99c; k \approx 7$

Flugzeit bezüglich Erde: $t = 2 \text{ km}/v = 6,74 \cdot 10^{-6} \text{ s}$. Eigenzeit ist dann $t/k = 9,6 \cdot 10^{-7} \text{ s}$.
 $\Rightarrow N = N_0 e^{-t \ln 2/T}; N(9,6 \cdot 10^{-7}) = 6417$ wie erwartet.

Lös. ZU AUFG. 12 Vor dem Stoß ist $E = E_{\text{kin}} + m_0 = 2m_0$.

Also ist $k = 2; v = 0,87$

Nach dem Stoß: $M = m_0 + 2m_0$ (Energieerhaltung) und $Mu = mv = 2m_0v$ (Impulserhaltung). Daraus folgt $3m_0u = 2m_0v \Rightarrow u = 2 \cdot 0,87/3 = 0,58$. Dies ergibt einen k-Faktor von $k = 1,23$ für M . Somit ist $M_0 = M/k = 3m_0/k = 2,44m_0$.

Literatur

- [1] RAY D'INVERNO: *Einführung in die Relativitätstheorie*; VCH Verlagsgesellschaft; 1998; Enthält u. a. eine gute Einführung in die Tensoranalysis. ISBN: 3-527-29073-7.
- [2] GEORG HEINRICHS: *Einstein und die Schwarzen Löcher*; Nr. 46 in Praxis-Schriftenreihe Physik; Aulis; 1989; Dieses Bändchen verwendet nur Mathematik der Oberstufe, keine Tensoren. Es ist sehr empfehlenswert. ISBN: 3-7614-1134-0.
- [3] WOLFGANG RINDLER: *Essential Relativity*; Springer; 1977; Gute, weitreichende Einführung. ISBN: 3-540-10090-3.
- [4] R. U. SEXL UND H. K. URBANTKE: *Gravitation und Kosmologie*; BI Wissenschaftsverlag; Bibliographisches Institut; 1975; Allgemeine Relativitätstheorie mit Tensoren, aber verständlich. ISBN: 3-411-01487-3.
- [5] ROMAN UND HANNELORE SEXL: *Weißer Zwerge – Schwarze Löcher*; Vieweg Studium; Vieweg & Sohn; 1979; Eine elementare Einführung in die allgemeine Relativitätstheorie. ISBN: 3-528-17214-2.