5 Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition 5.1. Es sei $f : V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung. $\vec{v}$ ist ein *Eigenvektor* von f mit dem *Eigenwert* λ, wenn gilt:

$$\vec{v} \neq \vec{0} \quad \text{und} \quad f(\vec{v}) = \lambda \cdot \vec{v}$$

Eigenvektoren sind also diejenigen, die von der Abbildung nur gestreckt werden. Der zugehörige Eigenwert ist der Streckungsfaktor. Null als Eigenwert ist erlaubt, der Nullvektor ist aber kein Eigenvektor.

Wir schreiben im folgenden EV für Eigenvektor und EW für Eigenwert.

Ist $\vec{v}$ ein EV von f mit dem EW λ, und ist A eine Darstellungsmatrix von f über einer beliebigen Basis von V, dann gilt

$$A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v} = \lambda \cdot E \cdot \vec{v},$$

wo E für die Einheitsmatrix steht. Es folgt also

$$(A - \lambda \cdot E) \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

Da $\vec{v}$ nicht der Nullvektor ist, muss gelten:

$$\det(A - \lambda \cdot E) = 0$$

Dies liefert uns eine Gleichung für die möglichen EWe λ von A und f. Wir studieren das zuerst an einem

Beispiel: f sei eine der beiden Rotationen von 120° um die 111-Richtung in $\mathcal{R}$, welche den Einheitswürfel auf sich selber abbildet. Über der Standardbasis wird f dargestellt durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir kennen die EVen dieser Abbildung, aber wir wollen sie auch noch berechnen.

$$\det(A - \lambda \cdot E) = \det \begin{pmatrix} (0-\lambda) & 1 & 0 \\ 0 & (0-\lambda) & 1 \\ 1 & 0 & (0-\lambda) \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 1$$

Die möglichen EWe finden wir als Nullstellen des *charakteristischen Polynoms* von A.

$$-\lambda^3 + 1 = (1 - \lambda) \cdot (\lambda^2 + \lambda + 1) = 0$$

Die Diskriminante des quadratischen Terms ist negativ, einzige Nullstelle ist also $\lambda = 1$.

Es muss also zum EW $\lambda = 1$ einen EV $\vec{v} \neq \vec{0}$ geben. Wir kennen ihn schon, aber wir berechnen ihn noch:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Daraus erhalten wir $y = x$, $z = y$ und $x = z$. Der EV $\vec{v}$ hat also die Gestalt

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}, \quad x \neq 0$$

Ein Beispiel dafür ist erwartungsgemäss der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, der ja in Richtung der Drehachse zeigt.

Das führt uns noch zum folgenden

Lemma 5.2. Ist $\vec{v}$ ein EV zum EW λ, dann sind es auch alle Vielfachen von $\vec{v}$. Für $w = \mu \cdot \vec{v}$ gilt dann auch $f(\vec{w}) = \lambda \cdot \vec{w}$.

Beweis: $f(\vec{w}) = f(\mu \cdot \vec{v}) = \mu \cdot f(\vec{v}) = \mu \cdot \lambda \cdot \vec{v} = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot \vec{w}$ □

Satz 5.3. Es sei f ein Endomorphismus von V, A sei eine DM von f über einer Basis von V. Dann findet man alle EWe von f (oder von A) als Nullstellen des charakteristischen Polynoms von f. Dieses entsteht bei der Berechnung der Determinante von $A - \lambda \cdot E$. Es hat den Grad $n = \dim(V)$.

Bemerkung: Wir wissen nur für $n = 1, 2, 3$ wie wir die Determinante aus den Elementen a_{ij} einer Matrix A berechnen können. Wir können nur in diesen Fällen das charakteristische Polynom bestimmen. Allgemein gilt noch

Satz 5.4. Ähnliche Matrizen haben dasselbe charakteristische Polynom.

Wir können das hier nicht beweisen. Dass die Nullstellen der charakteristischen Polynome übereinstimmen müssen, sollte Ihnen aber klar sein.

Es folgen einige weitere Lemmata zur linearen Unabhängigkeit von Eigenvektoren.

Lemma 5.5. Sind λ und μ verschiedene EWe von f, dann sind die zugehörigen EV $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear unabhängig.

Beweis: Das ist eine direkte Folge von Lemma 5.2. □

Lemma 5.6. Ist λ ein EW der Abbildung $f : V \longrightarrow V$, so bilden alle EVen zum EW λ einen Unterraum U von V.

Beweis: Das folgt sofort aus der Linearität von f (Übungsaufgabe). □

Bemerkung: λ ist ja eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms. Ist die Dimension von U gleich der Vielfachheit, mit der λ Nullstelle ist, so sagt man auch, dass die *algebraische Vielfachheit* mit der *geometrischen Vielfachheit* übereinstimmt. Generell ist die geometrische Vielfacheit kleiner oder gleich der algebraischen.

Lemma 5.7. Die Vektoren $\vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_m$ seien linear unabhängig. Zudem seien sie die EVen von f zu den EWen $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m$. Nun existiere noch ein Vektor $\vec{v}_1$, der ein EV von f zum EW λ_1 sei. Ist λ_1 verschieden von allen andern EWen λ_i, $i > 1$, dann ist auch die Menge $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_m\}$ linear unabhängig.

Beweis: Wäre etwa $\vec{v}_1 = \mu_2 \cdot \vec{v}_2 + \mu_3 \cdot \vec{v}_3 + \ldots + \mu_m \cdot \vec{v}_m$, dann hätten wir einerseits

$$f(\vec{v}_1) = \lambda_1 \cdot \vec{v}_1 = \lambda_1 \cdot \mu_2 \cdot \vec{v}_2 + \lambda_1 \cdot \mu_3 \cdot \vec{v}_3 + \ldots + \lambda_1 \cdot \mu_m \cdot \vec{v}_m$$

und andererseits

$$\begin{aligned} f(\vec{v}_1) &= \mu_2 \cdot f(\vec{v}_2) + \mu_3 \cdot f(\vec{v}_3) + \ldots + \mu_m \cdot f(\vec{v}_m) \\ &= \mu_2 \cdot \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 + \mu_3 \cdot \lambda_3 \cdot \vec{v}_3 + \ldots + \mu_m \cdot \lambda_m \cdot \vec{v}_m \end{aligned}$$

Die Differenz dieser beiden Gleichungen liefert

$$\vec{0} = (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \mu_2 \cdot \vec{v}_2 + (\lambda_1 - \lambda_3) \cdot \mu_3 \cdot \vec{v}_3 + \ldots + (\lambda_1 - \lambda_m) \cdot \mu_m \cdot \vec{v}_m$$

Daraus folgt aber $\lambda_1 = \lambda_2, \lambda_1 = \lambda_3, \ldots, \lambda_1 = \lambda_m$, da die Vektoren $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, ..., $\vec{v}_m$ ja linear unabhängig sind. Dies steht im Widerspruch dazu, dass λ_1 verschieden ist von allen andern λ_i.

□

Satz 5.8. Es sei f ein Endomorphismus von V, mit $\dim(V) = n$. Dann gilt

i) f hat höchstens n verschiedene EWe.

ii) hat f n verschiedene EWe $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, dann besitzt V eine Basis von EVen, und über dieser Basis ist die DM von f gleich der Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Beweis:

i) Nach Lemma 5.4 und 5.6 ist eine Menge von EVen, die zu lauter verschiedenen EWen gehören, linear unabhängig. Wegen $\dim(V) = n$ kann es also höchstens n verschiedene EWe geben, ihre EVen bilden dann schon eine Basis.

ii) Zu jedem EW λ_i gibt es einen (von $\vec{0}$ verschiedenen) EV $\vec{e}_i$. Da die λ_i alle verschieden sind, bilden die EV $\vec{e}_i$ eine Basis. Über dieser Basis hat A Diagonalgestalt.

□

Bemerkungen:

- Ist $\dim(V) = n$, so ist des Grad des charakteristischen Polynoms ja n. Daraus ergibt sich ebenfalls, dass es höchstens n verschiedene EWe geben kann, da ein Polynom vom Grad n höchstens n Lösungen hat.

- Über $k = \mathbb{C}$ zerfällt ein Polynom vom Grad n immer in ein Produkt von n Linearfaktoren. Diese brauchen aber nicht verschieden zu sein. Und hat etwa die Nullstelle z die algebraische Vielfachheit 3, so *kann* der Unterraum U von V zu diesem EW z auch nur die Dimension 2 haben, beispielsweise. Dann ist die geometrische Vielfachheit kleiner als die algebraische.

Bevor wir weiterfahren, folgen noch einige Aufgaben.

Aufgaben

1. Bestimmen Sie die Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren zu den folgenden Endomorphismen von $\mathbb{R}^n$:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 99 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

2. Bestimmen Sie die Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren zu den folgenden Endomorphismen von $\mathbb{C}^n$:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. Bestimmen Sie die Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren zu den folgenden Endomorphismen von $(\mathbb{Z}_7)^n$:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

4. A sei die Matrix von 1a, C sei die Matrix derselben linearen Abbildung, wenn Sie über einer Basis von Eigenvektoren beschriebenen wird. Berechnen Sie eine Matrix B, sodass gilt:

$$C = B \cdot A \cdot B^{-1}$$

Definition 5.9. Die Spur einer Matrix A ist die Summe der Elemente auf der Hauptdiagonalen:

$$\mathrm{spur}(A) = \mathrm{trace}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Lemma 5.10. Für alle Matrizen A und B aus $\mathbb{M}^{n\times n}(k)$ gilt

$$\mathrm{spur}(A \cdot B) = \mathrm{spur}(B \cdot A)$$

Beweis:

Für $n = 1, 2, 3$ können wir das durch direktes Nachrechnen prüfen. Tatsächlich folgt das ganz elementar aus der Definition des Produkts zweier Matrizen:

$$\text{Es ist} \quad (A \cdot B)_{ii} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{ji} \quad \text{und} \quad (B \cdot A)_{ii} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \cdot a_{ji}.$$

Somit

$$\mathrm{spur}(A \cdot B) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{ji} \quad \text{und} \quad \mathrm{spur}(B \cdot A) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \cdot a_{ji}.$$

Das sind aber beidesmal dieselben n^2 Summanden ! □

Korollar 5.11. Für alle A, B, C in $\mathbb{M}^{n\times n}(k)$ gilt

i) $\operatorname{spur}(A \cdot B \cdot C) = \operatorname{spur}(C \cdot A \cdot B)$

ii) $\operatorname{spur}(B \cdot A \cdot B^{-1}) = \operatorname{spur}(A)$

iii) Sind A und B DM derselben linearen Abbildung f, so gilt $\operatorname{spur}(A) = \operatorname{spur}(C)$

Bemerkung: Wir können also von der Spur einer linearen Abbildung f sprechen, da alle DMen von f dieselbe Spur haben!

Beweise zu Korollar 5.11:

i) folgt aus Lemma 5.10 und der Assoziativität der Matrix-Multiplikation

ii) folgt sofort aus i)

iii) ergibt sich aus ii) und dem Satz 3.22 $\square$

Korollar 5.12. f sei ein Endomorphismus von V. V besitze eine Basis $\vec{e}_i$ aus EVen von f. A sei eine DM von f über einer beliebigen Basis. Dann gilt

i) A ist diagonalisierbar, d. h. $\exists\, B \in \mathbb{M}^{n\times n}(k)$ mit $B \cdot A \cdot B^{-1}$ ist Diagonalmatrix.

ii) Die Spur von A ist die Summe der Eigenwerte von f.

iii) Die Determinante von A ist das Produkt der Eigenwerte von f.

iv) Der Rang von A ist die Anzahl der Vektoren $\vec{e}_i$ in der Basis mit einem EW $\neq 0$.

Begründen Sie diese vier Aussagen!

Wir machen noch ein

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

Die Matrix ist schon diagonal, die gewählte Basis $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ besteht aus EVen, zu denen die EWe 2, 1 und -5 gehören. Es gilt:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(f) = 2 \cdot 1 \cdot (-5) = -10 \\ \operatorname{spur}(A) &= \operatorname{spur}(f) = 2 + 1 + (-5) = -2 \\ \operatorname{rang}(A) &= \operatorname{rang}(f) = 3 \end{aligned}$$

Der Rang ist die Anzahl der von 0 verschiedenen Diagonalelemente.

Aufgaben

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{8} & \frac{3}{4} \\ 1 & \frac{19}{8} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{7}{2} & -\frac{13}{16} & \frac{29}{8} \end{pmatrix}$

1. Bestimmen Sie die EWe von A
2. Bestimmen Sie „schöne“ EVen zu jedem EW
3. Ist A diagonalisierbar?
4. Geben Sie eine Matrix B an, welche A auf eine Diagonalmatrix transformiert durch $B \cdot A \cdot B^{-1}$
5. Wie hat der Autor wohl die Matrix A konstruiert?

Version 1.0 vom Februar 2015

Ausgearbeitet von Martin Gubler, Kantonsschule Frauenfeld, im November 2014

Mit LaTeX in eine lesbare Form gebracht von Alfred Hepp, Bergün im Februar 2015