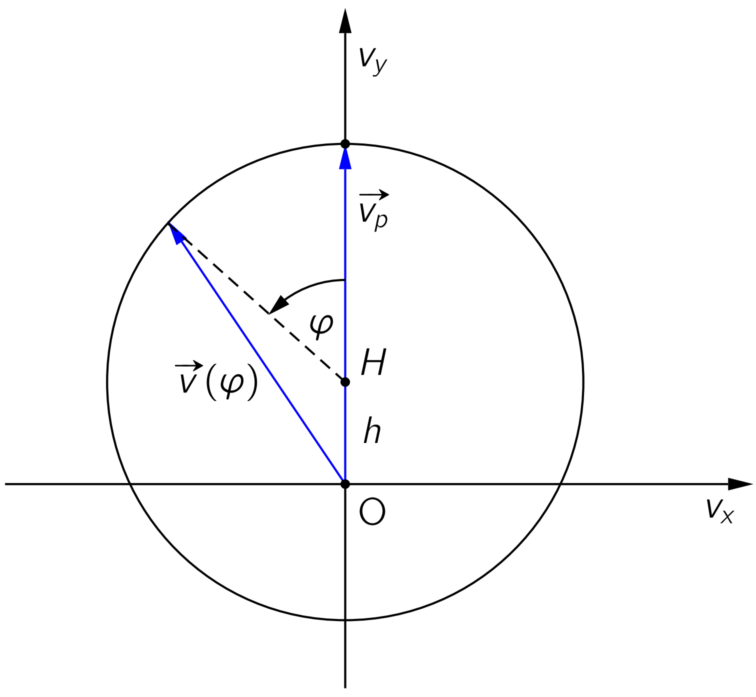
Der Hodograph einer elliptischen Bahn

Trägt man alle auftretenden Geschwindigkeitsvektoren einer Trajektorie vom gleichen Punkt aus ab, so liegen deren Spitzen auf einer Kurve, die man den *Hodographen* der Bahn nennt.

Der Hodograph einer elliptischen Bahn ist ein Kreis (Hamilton 1846). Dafür geben wir hier einen Beweis, der nur auf dem Gravitationsgesetz von Newton, den Eigenschaften von Ellipsen und dem Cosinussatz beruht. Auf den Einsatz von Analysis können wir vollständig verzichten, wenn wir die potentielle Energie im Kraftfeld einer kugelförmigen Masse als bekannt voraussetzen.

Diese Arbeit wurde durch den Artikel "An algebra and trigonometry-based proof of Kepler's first law" von Akarsh Simha im Am. J. of Phys. 89 (11) vom November 2021 angeregt.



Ausgearbeitet von Martin Gubler, Frauenfeld, 29.Oktober 2021
(Version 1.1 vom 10. Januar 2022)

Mit LaTeX schön gesetzt von Alfred Hepp, Bergün, im November 2021

1 Das Quadrat der Geschwindigkeit als Funktion des Abstandes r

Die Gesamtenergie E einer kleinen Masse m im Gravitationsfeld einer grossen Masse M ist nach Newton gegeben durch

$$E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{G \cdot M \cdot m}{r} \tag{1}$$

Wir nehmen an, dass die Gesamtenergie negativ ist. Akarsh Simha zeigt in seinem Artikel, dass sich dann der kleine Körper auf einer elliptischen Bahn um den grösseren bewegt.

Der Fallkreis (Leitkreis, circular directrix, cercle directeur) für diese Ellipse hat den Radius $2 \cdot a$. In jenem Abstand von M wäre die kinetische Energie des kleinen Körpers gerade null. Ein Beweis dieser Tatsache findet sich ebenfalls im eingangs erwähnten Artikel von Akarsh Simha. Es gilt also

$$E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{G \cdot M \cdot m}{r} = -\frac{G \cdot M \cdot m}{2 \cdot a} \tag{2}$$

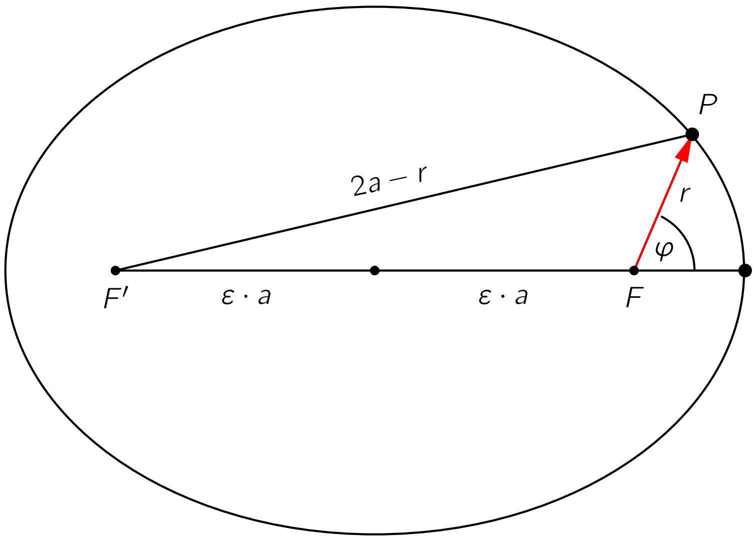
Daraus erhalten wir für v^2 den Ausdruck

$$v^2 = -\frac{G \cdot M}{a} + \frac{2 \cdot G \cdot M}{r} \tag{3}$$

Im nächsten Schritt ersetzen wir die Variable r durch den Winkel φ zwischen dem Vektor $\vec{r}$ und dem Vektor, der von M zum 'Perihel' der Bahn zeigt.

Mehr zum Fallkreis findet sich in "Kepler_09.pdf " auf
https://www.physastromath.ch/material/mathematik/keplernewton/

2 Das Quadrat der Geschwindigkeit als Funktion des Winkels φ



Es ist $F'P = 2 \cdot a - r$ und $F'F = 2 \cdot a \cdot \varepsilon$, wenn a wie üblich die grosse Halbachse der Ellipse und ε die numerische Exzentrizität bezeichnen. Nach dem Cosinus-Satz gilt

$$(2 \cdot a - r)^2 = r^2 + (2 \cdot a \cdot \varepsilon)^2 - 2 \cdot r \cdot 2 \cdot a \cdot \varepsilon \cdot \cos(180^\circ - \varphi)$$

Elementare Umformungen führen zu

$$a^2 \cdot (1 - \varepsilon^2) = r \cdot a \cdot (1 + \varepsilon \cdot \cos(\varphi))$$

und damit zu

$$r = \frac{a \cdot (1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cdot \cos(\varphi)} \tag{4}$$

(4) ist die Polarform der Ellipsengleichung, im Zähler steht das *Quermass* p .

Setzen wir das in (3) ein erhalten wir den folgenden etwas umständlichen Ausdruck für v^2:

$$v^2 = -\frac{G \cdot M}{a} + \frac{2 \cdot G \cdot M \cdot (1 + \varepsilon \cdot \cos(\varphi))}{a \cdot (1 - \varepsilon^2)}$$

oder

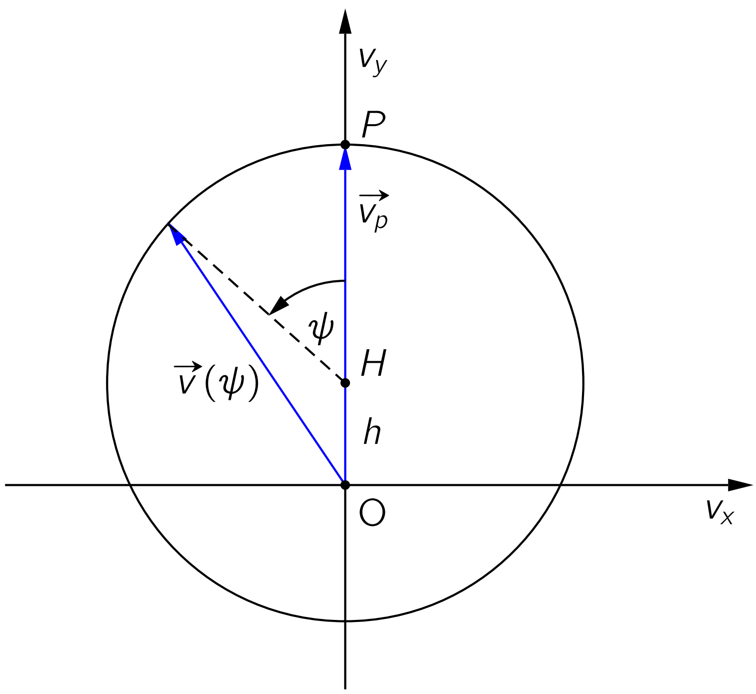
$$v^2 = \left[\frac{2 \cdot G \cdot M}{a \cdot (1 - \varepsilon^2)} - \frac{G \cdot M}{a}\right] + \left[\frac{\varepsilon \cdot 2 \cdot G \cdot M}{a \cdot (1 - \varepsilon^2)}\right] \cdot \cos(\varphi) \tag{5}$$

3 Wenn der Hodograph ein Kreis wäre ...

Der Hodograph ist genau dann ein Kreis, wenn es zwei **Konstanten** h und ρ gibt, so dass für alle Geschwindigkeiten gilt

$$v^2 = h^2 + \rho^2 - 2 \cdot h \cdot \rho \cdot \cos(180^\circ - \psi) = h^2 + \rho^2 + 2 \cdot h \cdot \rho \cdot \cos(\psi) \tag{6}$$

Wir benützen also nochmals den Cosinus-Satz. Dabei ist ρ der Radius des Kreises, und $180^\circ - \psi$ ist der Winkel, welcher der Seite v im Dreieck mit den Seiten v, h und ρ gegenüber liegt. Die Bedeutung von ψ werden wir im nächsten Abschnitt erkennen.



$|\vec{v_p}| = h + \rho$ ist die maximale Geschwindigkeit der kleinen Masse m im Punkt des kleinsten Abstandes von der grossen Masse M, also im 'Perihel'.

Wir bestimmen nun die Werte von h und ρ so, dass die Gleichungen (5) und (6) bis auf die Bezeichnung des Winkels identisch werden. Dafür muss gelten

(i) $$h^2 + \rho^2 = \frac{2 \cdot G \cdot M}{a \cdot (1 - \varepsilon^2)} - \frac{G \cdot M}{a}$$

(ii) $$2 \cdot h \cdot \rho = \frac{\varepsilon \cdot 2 \cdot G \cdot M}{a(1 - \varepsilon^2)}$$

h und ρ gehen symmetrisch in die Gleichungen ein. Bei einer elliptischen Bahn muss aber h kleiner sein als ρ, weil die Geschwindigkeit $\vec{v_a}$ im 'Aphel' negativ sein muss.

4 Die Berechnung von h und ρ

Mit dem Ansatz $h = x \cdot \rho$ gewinnt man aus den Gleichungen (i) und (ii) die quadratische Gleichung

$$\varepsilon \cdot x^2 - (1+\varepsilon^2) \cdot x + \varepsilon = 0$$

mit den Lösungen $x = \varepsilon$ und $x = 1/\varepsilon$. Da h kleiner sein muss als ρ, kommt nur die Lösung $x = \varepsilon$ in Frage. Es gilt somit

$$h = \varepsilon \cdot \rho \tag{7}$$

Ersetzt man jetzt in der Gleichung (ii) die Variable h durch $\varepsilon \cdot \rho$, so erhält man sofort

$$2 \cdot \varepsilon \cdot \rho^2 = 2 \cdot \varepsilon \cdot \frac{G\dot{M}}{a \cdot (1-\varepsilon^2)}$$

und damit

$$\rho^2 = \frac{G \cdot M}{a \cdot (1-\varepsilon^2)} \tag{8}$$

Elementare Rechnungen zeigen, dass mit (7) und (8) auch (i) erfüllt ist.

Mit $h = \varepsilon \cdot \rho$ und $\rho = \sqrt{\dfrac{G \cdot M}{a \cdot (1-\varepsilon^2)}}$ werden die Gleichungen (5) und (6) tatsächlich identisch bis auf die Bezeichnung des Winkels. Wenn aber für alle Geschwindigkeiten und alle Winkel φ gilt

$$h^2 + \rho^2 + 2 \cdot h \cdot \rho \cdot \cos(\varphi) = v^2 = h^2 + \rho^2 + 2 \cdot h \cdot \rho \cdot \cos(\psi)$$

dann gilt $\cos(\varphi) = \cos(\psi)$ für alle Winkel $\varphi \in [0°, 360°]$.

Nach der Figur im Abschnitt 3 gilt $v_x = -\rho \cdot \sin(\psi)$ und $v_y = h + \rho \cdot \cos(\psi)$. Daraus folgt mit der Figur im Abschnitt 2, dass die beiden Winkel ψ und φ gleich sein müssen:

$$\psi = \varphi \tag{9}$$

5 Zusammenfassung

Der Hodograph der Bewegung einer kleinen Masse im Gravitationsfeld einer grossen Masse ist also für negative Gesamtenergien ein Kreis.

Es gelten dabei die folgenden Beziehungen:

$$E_{tot} = -\frac{G \cdot M \cdot m}{2 \cdot a}$$

$$r(\varphi) = \frac{a \cdot (1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon \cdot \cos(\varphi)} = \frac{p}{1+\varepsilon \cdot \cos(\varphi)}$$

$$\rho = \sqrt{\frac{G \cdot M}{a \cdot (1-\varepsilon^2)}} = \sqrt{\frac{G \cdot M}{p}}$$

$$h = \varepsilon \cdot \rho$$

$$v^2 = h^2 + \rho^2 + 2 \cdot h \cdot \rho \cdot \cos(\varphi)$$

$$\vec{v}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} + \rho \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Das Quermass p ist dabei zu unterscheiden vom Radius ρ des Hodographen.

Bei der Herleitung haben wir nur allgemeine Eigenschaften von Ellipsen und den Cosinus-Satz eingesetzt. Auf Analysis-Kenntnisse kann vollständig verzichtet werden, wenn das Potential des Newton'schen Kraftfeldes als bekannt vorausgesetzt wird.