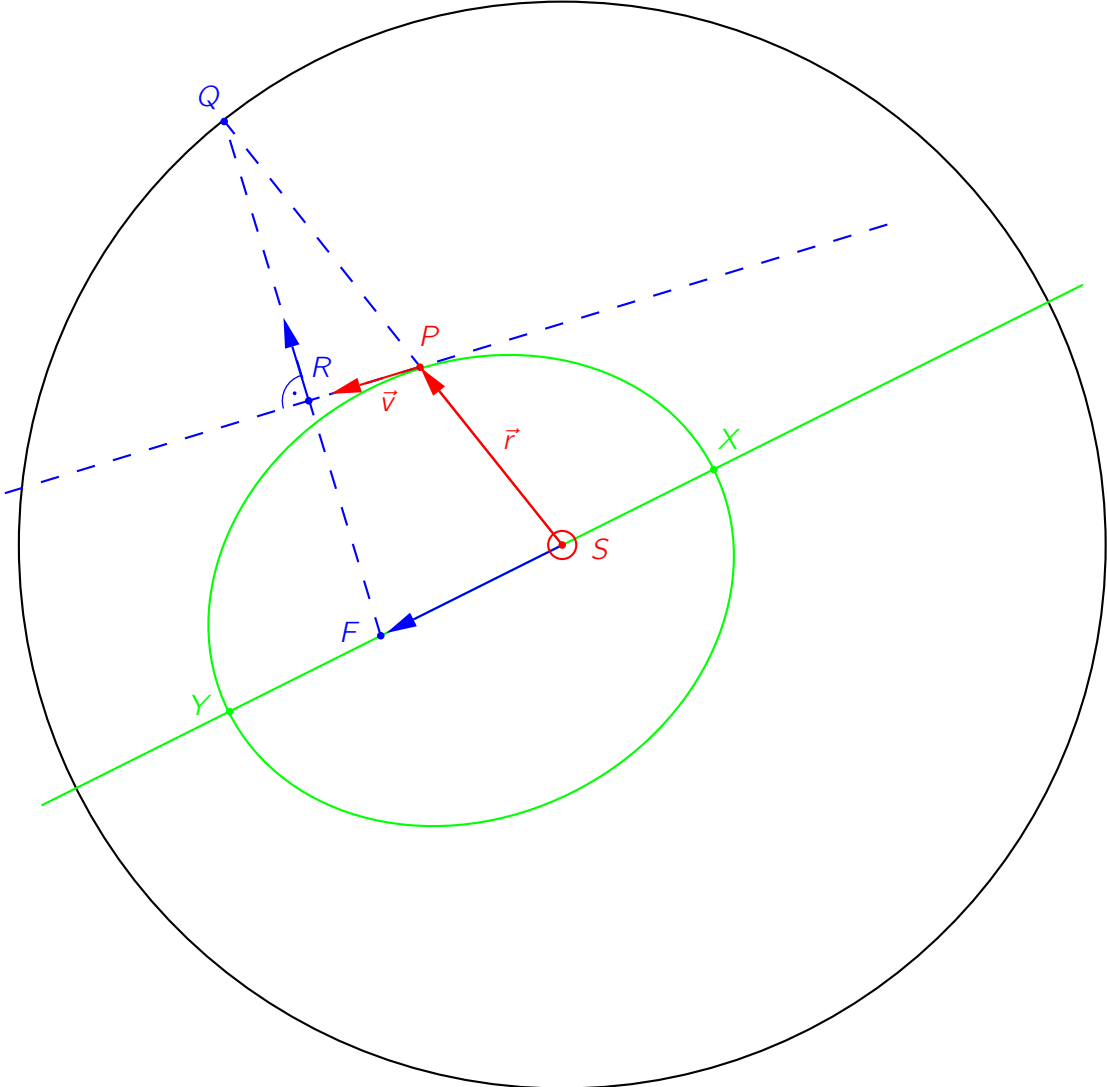


Vom Fallkreis zur Bahnellipse und zum Hodographen



- Gegeben:
- S Ort der Sonne
 - P Ort des Planeten zu irgendeinem Zeitpunkt t_0
 - \vec{v} Geschwindigkeit des Planeten zum Zeitpunkt t_0

Version 1.1 Frauenfeld, 4. Februar 2013, Martin Gubler
 In eine lesbare Form gebracht von Alfred Hepp im Februar 2013

1 Der Radius des Fallkreises

Der Radius $2a = |\vec{SQ}|$ des „Fallkreises“ um die Sonne ist definiert durch diejenige Distanz, in welcher der Planet *bei gleichbleibender Gesamtenergie* keine kinetische Energie mehr hätte:

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - G \cdot M \cdot m \cdot \frac{1}{r} = E_{\text{tot}} = -G \cdot M \cdot m \cdot \frac{1}{2a}$$

also

$$v^2 = 2 \cdot G \cdot M \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a} \right) = 2 \cdot G \cdot M \cdot \frac{2a - r}{2 \cdot a \cdot r} \quad (1)$$

Hier haben wir schon ein erstes Mal das $\frac{1}{r^2}$ -Kraftgesetz von Newton verwendet.

Jedes zentrale Kraftfeld ist „konservativ“, d. h. die Gesamtenergie eines Körpers, der sich in einem Kraftfeld bewegt, ist konstant. Die Streckenlänge $2a$ ist somit eine *Invariante* der Planetenbewegung.

Der französische Name des Fallkreises ist „cercle directeur“ – auch nicht schlecht! Der deutsche Name reflektiert die Tatsache, dass der Planet in P gerade die kinetische Energie $\frac{1}{2}mv^2$ hätte, wenn er aus anfänglicher Ruhe von Q nach P fallen würde im Gravitationsfeld der Sonne.

2 Die Konstruktion der Bahnellipse

Nebst \vec{r} und \vec{v} sei jetzt also auch der Fallkreis mit seinem Radius $2a$ bekannt. In wenigen Schritten lässt sich nun die Bahnellipse konstruieren:

- Q ist die Projektion von P auf den Fallkreis
- t ist die Gerade durch P mit Richtungsvektor \vec{v} , also die zukünftige Ellipsentangente
- F ist das Spiegelbild von Q bezüglich t

F ist schon der zweite Brennpunkt der Bahnellipse!

Wegen $\overline{SP} + \overline{PF} = \overline{SP} + \overline{PQ} = 2a$ muss a die grosse Halbachse der Ellipse sein.

$c = \frac{1}{2}|\vec{SF}|$ ist die lineare Exzentrizität der Ellipse,

$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{|\vec{SF}|}{2 \cdot a}$ ist die numerische Exzentrizität, und

$b = \sqrt{a^2 - c^2} = a \cdot \sqrt{1 - \varepsilon^2}$ ist die kleine Halbachse.

Es muss natürlich noch gezeigt werden, dass die Position von F *nicht* von den momentanen Werten von \vec{r} und \vec{v} abhängt, dass also der Vektor \vec{SF} konstant ist, auch wenn sich $\vec{r}(t)$ und $\vec{v}(t)$ ändern.

3 \vec{r} , \vec{v} und \vec{n} in Polarkoordinaten

Um die Konstruktion rechnerisch nachvollziehen zu können, drücken wir die Vektoren $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$ und $\vec{n}(t)$ in Polarkoordinaten aus:

$$\vec{r} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} = r(t) \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi(t)) \\ \sin(\varphi(t)) \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} + r \cdot \dot{\varphi} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{r} \cdot \cos \varphi - r \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin \varphi \\ \dot{r} \cdot \sin \varphi + r \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Den Normalenvektor \vec{n} zu \vec{v} bilden wir nach dem bekannten Muster:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} \dot{r} \cdot \sin \varphi + r \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos \varphi \\ -\dot{r} \cdot \cos \varphi + r \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Nach Konstruktion haben \vec{n} und \vec{v} denselben Betrag, \vec{n} ist der um 90° im Uhrzeigersinn gedrehte Vektor \vec{v} .

4 $\vec{r} \times \vec{v}$ als weitere Invariante der Bahnbewegung

Der Vektor $\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{v}$ steht senkrecht auf der Bahnebene. Dass die Bahn eben sein muss, ergibt sich gerade daraus, dass der Vektor $\vec{\ell}$ konstant ist, wenn die Bewegung in einem zentralen Kraftfeld stattfindet:

$$\dot{\vec{\ell}} = (\vec{r} \times \vec{v})' = \dot{\vec{r}} \times \vec{v} + \vec{r} \times \dot{\vec{v}} = \vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{a} = \vec{0} + \vec{0}$$

Der zweite Summand ist gerade dann null, wenn \vec{r} und \vec{a} parallel oder antiparallel sind.

Physikalischer gesprochen:

$$\vec{L} = m \cdot \vec{\ell} = m \cdot (\vec{r} \times \vec{v}) = \vec{r} \times (m \cdot \vec{v}) = \vec{r} \times \vec{p}$$

ist der Bahndrehimpuls dieser Bewegung. Dieser kann sich in einem zentralen Kraftfeld nicht ändern, da das Drehmoment immer null ist mangels Hebelarm.

Eine kleine Rechnung liefert

$$\vec{\ell} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r^2 \cdot \dot{\varphi} \end{pmatrix}, \quad \ell = r^2 \cdot \dot{\varphi} \text{ ist konstant} \quad (2)$$

5 Die Berechnung des Vektors \vec{SF}

Ausgehend von der Darstellung von \vec{r} , \vec{v} und \vec{n} im Abschnitt 3 können wir alle bei der Konstruktion von \vec{SF} verwendeten Vektoren ausdrücken:

$$\vec{SQ} = 2 \cdot a \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}; \quad \vec{PQ} = (2 \cdot a - r) \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$\vec{QF} = -2 \cdot \vec{RQ} = -2 \cdot \left(\vec{PQ} \cdot \frac{\vec{n}}{n} \right) \cdot \frac{\vec{n}}{n} = -2 \cdot \left(\vec{PQ} \cdot \vec{n} \right) \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \vec{n} = \frac{-2}{v^2} \cdot \left(\vec{PQ} \cdot \vec{n} \right) \cdot \vec{n}$$

Berechnen wir also $\vec{PQ} \cdot \vec{n}$:

$$(2 \cdot a - r) \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{r} \cdot \sin \varphi + r \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos \varphi \\ -\dot{r} \cdot \cos \varphi + r \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin \varphi \end{pmatrix} =$$

$$(2 \cdot a - r) \cdot [\dot{r} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi + r \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos^2 \varphi - \dot{r} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi + r \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin^2 \varphi] =$$

$$(2 \cdot a - r) \cdot [r \cdot \dot{\varphi} \cdot (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)] = (2 \cdot a - r) \cdot r \cdot \dot{\varphi}$$

Nach (1) ist $n^2 = v^2 = 2 \cdot G \cdot M \cdot \frac{2 \cdot a - r}{2 \cdot a \cdot r}$. Somit

$$\vec{QF} = -2 \cdot \cancel{(2 \cdot a - r)} \cdot r \cdot \dot{\varphi} \cdot \frac{2 \cdot a \cdot r}{2 \cdot G \cdot M \cdot \cancel{(2 \cdot a - r)}} \cdot \vec{n} =$$

$$-2a \cdot \frac{r^2 \cdot \dot{\varphi}}{G \cdot M} \cdot \vec{n} = -2a \cdot \frac{\ell}{G \cdot M} \cdot \vec{n} \quad (3)$$

Also

$$\vec{SF} = \vec{SQ} + \vec{QF} = 2 \cdot a \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} - 2 \cdot a \cdot \frac{\ell}{G \cdot M} \cdot \begin{pmatrix} \dot{r} \cdot \sin \varphi + r \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos \varphi \\ -\dot{r} \cdot \cos \varphi + r \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin \varphi \end{pmatrix} =$$

$$2a \cdot \frac{\ell}{G \cdot M} \cdot \begin{pmatrix} \frac{G \cdot M}{\ell} \cdot \cos \varphi - \dot{r} \cdot \sin \varphi - r \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos \varphi \\ \frac{G \cdot M}{\ell} \cdot \sin \varphi + \dot{r} \cdot \cos \varphi - r \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (4)$$

6 Die Beschleunigung in einem zentralen Kraftfeld

Wir müssen ja noch zeigen, dass die Ableitung von \vec{SF} nach der Zeit den Nullvektor liefert. In dieser Rechnung tauchen auch Terme mit \ddot{r} auf, worauf wir uns ein bisschen vorbereiten müssen:

$$\begin{aligned} \vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{v}} &= \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \dot{r} \cdot \cos \varphi - r \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin \varphi \\ \dot{r} \cdot \sin \varphi + r \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos \varphi \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \ddot{r} \cdot \cos \varphi - \dot{r} \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin \varphi - \dot{r} \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin \varphi - r \cdot (\ddot{\varphi} \cdot \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cdot \cos \varphi) \\ \ddot{r} \cdot \sin \varphi + \dot{r} \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos \varphi + \dot{r} \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos \varphi + r \cdot (\ddot{\varphi} \cdot \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \cdot \sin \varphi) \end{pmatrix} = \\ &= (\ddot{r} - r \cdot \dot{\varphi}^2) \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} + (2 \cdot \dot{r} \cdot \dot{\varphi} + r \cdot \ddot{\varphi}) \cdot \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

In jedem zentralen Kraftfeld ist $\vec{a} \parallel \vec{r}$. Der zweite Summand in (5) muss also null sein, d. h. es muss gelten:

$$2 \cdot \dot{r} \cdot \dot{\varphi} + r \cdot \ddot{\varphi} = 0 \quad (6)$$

Dieses Resultat hätten wir auch schon aus der Konstanz von $\vec{\ell}$ herleiten können:

$$(2) \implies \dot{\ell} = 0, \quad \text{also} \quad 2 \cdot r \cdot \dot{r} \cdot \dot{\varphi} + r^2 \cdot \ddot{\varphi} = 0$$

Division durch r liefert ebenfalls (6).

Wenn wir nochmals das $\frac{1}{r^2}$ -Kraftgesetz verwenden, erhalten wir damit

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r \cdot \dot{\varphi}^2) \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} = -\frac{G \cdot M}{r^2} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

und daraus $\ddot{r} - r \cdot \dot{\varphi}^2 = -\frac{G \cdot M}{r^2}$

Division durch $\dot{\varphi}$ liefert

$$\frac{\ddot{r}}{\dot{\varphi}} - r \cdot \dot{\varphi} = -\frac{G \cdot M}{r^2 \cdot \dot{\varphi}} = -\frac{G \cdot M}{\ell}$$

und wir haben

$$\frac{G \cdot M}{\ell} = r \cdot \dot{\varphi} - \frac{\ddot{r}}{\dot{\varphi}} \quad (7)$$

7 Beweis der Invarianz von \vec{SF}

Jetzt können wir zeigen, dass die Ableitung von (4) null ist. Die konstanten Faktoren vor dem Vektor lassen wir dabei weg:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{l} \frac{G \cdot M}{\ell} \cdot \cos \varphi - \dot{r} \cdot \sin \varphi - r \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos \varphi \\ \frac{G \cdot M}{\ell} \cdot \sin \varphi + \dot{r} \cdot \cos \varphi - r \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin \varphi \end{array} \right)' = \\ & \left(\begin{array}{l} -\frac{G \cdot M}{\ell} \cdot \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} - \ddot{r} \cdot \sin \varphi - \dot{r} \cdot \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} - \dot{r} \cdot (\dot{\varphi} \cdot \cos \varphi) - r \cdot (\ddot{\varphi} \cdot \cos \varphi - \dot{\varphi} \cdot \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}) \\ \frac{G \cdot M}{\ell} \cdot \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} + \ddot{r} \cdot \cos \varphi - \dot{r} \cdot \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} - \dot{r} \cdot (\dot{\varphi} \cdot \sin \varphi) - r \cdot (\ddot{\varphi} \cdot \sin \varphi + \dot{\varphi} \cdot \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}) \end{array} \right) = \\ & \left(\begin{array}{l} (\frac{\ddot{r}}{\dot{\varphi}} - r \cdot \dot{\varphi}) \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin \varphi - \ddot{r} \cdot \sin \varphi - 2 \cdot \dot{r} \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos \varphi - r \cdot \ddot{\varphi} \cdot \cos \varphi + r \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \sin \varphi \\ (r \cdot \dot{\varphi} - \frac{\ddot{r}}{\dot{\varphi}}) \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos \varphi + \ddot{r} \cdot \cos \varphi - 2 \cdot \dot{r} \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin \varphi - r \cdot \ddot{\varphi} \cdot \sin \varphi - r \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \cos \varphi \end{array} \right) = \\ & \left(\begin{array}{l} \cancel{\ddot{r} \cdot \sin \varphi} - \cancel{r \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \sin \varphi} - \cancel{\ddot{r} \cdot \sin \varphi} - 2 \cdot \dot{r} \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos \varphi - r \cdot \ddot{\varphi} \cdot \cos \varphi + r \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \sin \varphi \\ \cancel{r \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \cos \varphi} - \cancel{\ddot{r} \cdot \cos \varphi} + \cancel{\ddot{r} \cdot \cos \varphi} - 2 \cdot \dot{r} \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin \varphi - r \cdot \ddot{\varphi} \cdot \sin \varphi - \cancel{r \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \cos \varphi} \end{array} \right) = \\ & - (2 \cdot \dot{r} \cdot \dot{\varphi} + r \cdot \ddot{\varphi}) \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{nach (6)} \end{aligned}$$

Damit ist bewiesen, dass die zu beliebigen Anfangsbedingungen $\vec{r}(t_0)$ und $\vec{v}(t_0)$ konstruierte Ellipse die Bahn des Planeten ist.

Mit \vec{SF} ist auch die Apsidenlinie $YFSX$ raumfest. Die genauen langzeitlichen Beobachtungen, dass die Apsidenlinien bis auf kleine Störungen durch benachbarte Planeten raumfest sind, sind auch eine Bestätigung des Exponenten -2 im Kraftgesetz. Nur aus diesem Exponenten ergeben sich geschlossene elliptische Bahnen!

Die anderen beiden Kepler'schen Gesetze lassen sich jetzt wie im Skriptum Kepler_01.pdf ableiten. Die Polarform der Ellipsengleichung wird dabei nicht benötigt.

8 Die Kreisform des Hodographen als Korollar

Trägt man alle Geschwindigkeiten, die ein Körper auf einer geschlossenen periodischen Bahn annimmt, von einem festen Punkt aus ab, so bilden die Spitzen dieser Geschwindigkeitsvektoren eine Kurve. Diese nennt man den Hodographen der Bewegung (siehe auch Kepler_04.pdf).

Wir erhalten fast gratis aus unserer Herleitung der Bahnellipse das folgende

Korollar: Der Hodograph zur elliptischen Bahn eines Planeten ist ein Kreis.

In der Tat: Trägt man alle Vektoren \vec{FQ} von F aus ab, so erhält man sicher einen Kreis, nämlich den Fallkreis mit Zentrum S und dem Radius $2a$. Nach (3) sind aber die Vektoren \vec{FQ} und \vec{n} proportional, Proportionalitätskonstante ist $2 \cdot a \cdot \frac{1}{G \cdot M}$. Wir erhalten also einen Kreis, wenn wir alle Vektoren \vec{n} von F aus abtragen. F ist wiederum *nicht* das Zentrum dieses Kreises. Nun gilt aber immer $\vec{n} \perp \vec{v}$ und $|\vec{n}| = |\vec{v}|$! Tragen wir also alle Vektoren \vec{v} von einem festen Punkt aus ab, so erhalten wir ebenfalls einen (um 90° gedrehten ...) Kreis. \square

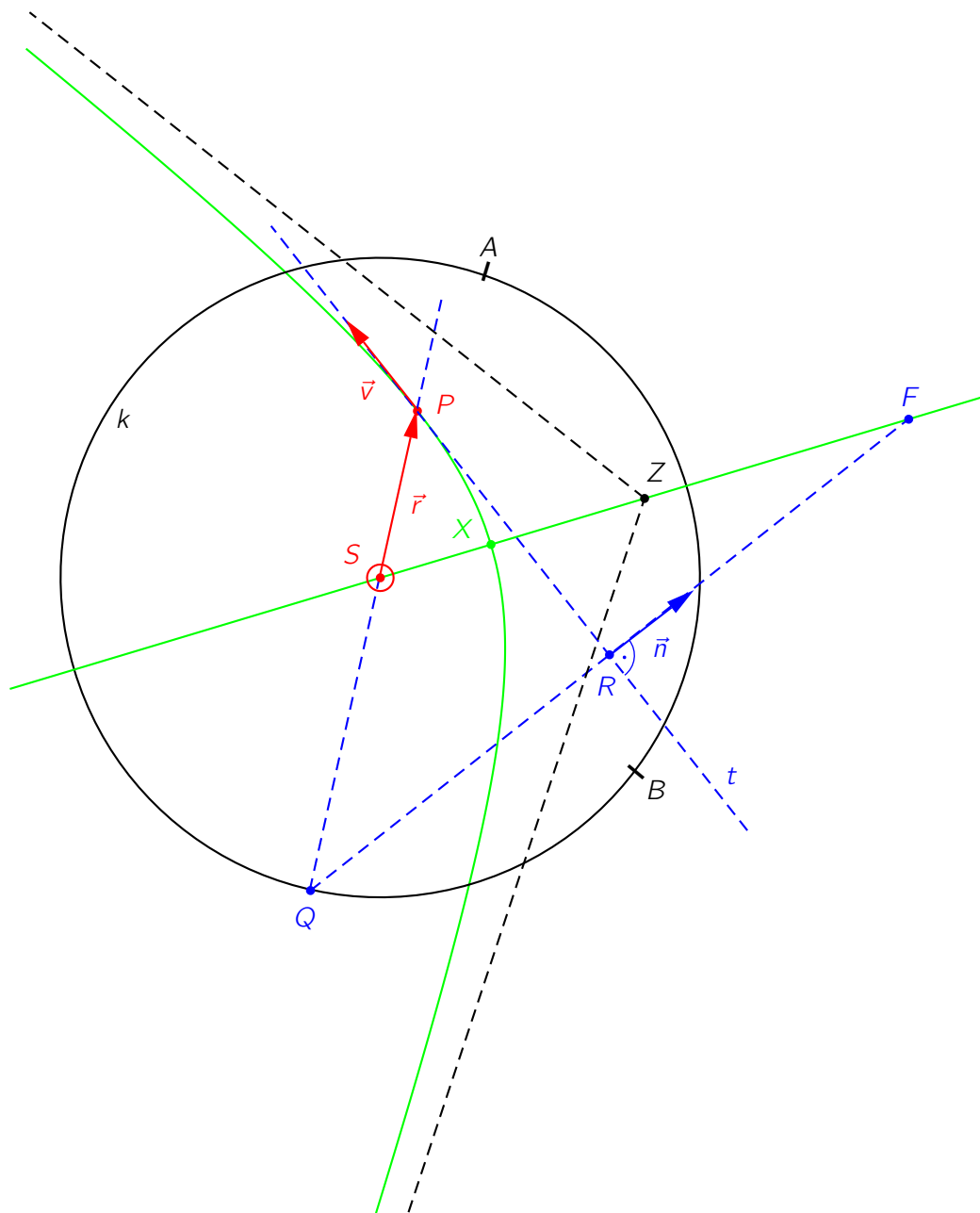
Genauer: $|\vec{v}| = |\vec{n}| = \frac{G \cdot M}{\ell \cdot 2 \cdot a} \cdot |\vec{FQ}|$ nach (3)

Der Hodograph hat also den Radius $2 \cdot a \cdot \frac{G \cdot M}{\ell \cdot 2 \cdot a} = \frac{G \cdot M}{\ell}$. Dieser Term hat auch die Einheiten einer Geschwindigkeit, wie wir mit der Gleichung (7) leicht prüfen können. Zudem:

$$v_{\max}(\text{in } X) = \frac{G \cdot M}{2 \cdot a \cdot \ell} \cdot (2a + 2c) = \frac{G \cdot M}{\ell} \cdot (1 + \varepsilon)$$

$$v_{\min}(\text{in } Y) = \frac{G \cdot M}{2 \cdot a \cdot \ell} \cdot (2a - 2c) = \frac{G \cdot M}{\ell} \cdot (1 - \varepsilon)$$

9 Und wenn die Gesamtenergie des Körpers positiv ist?

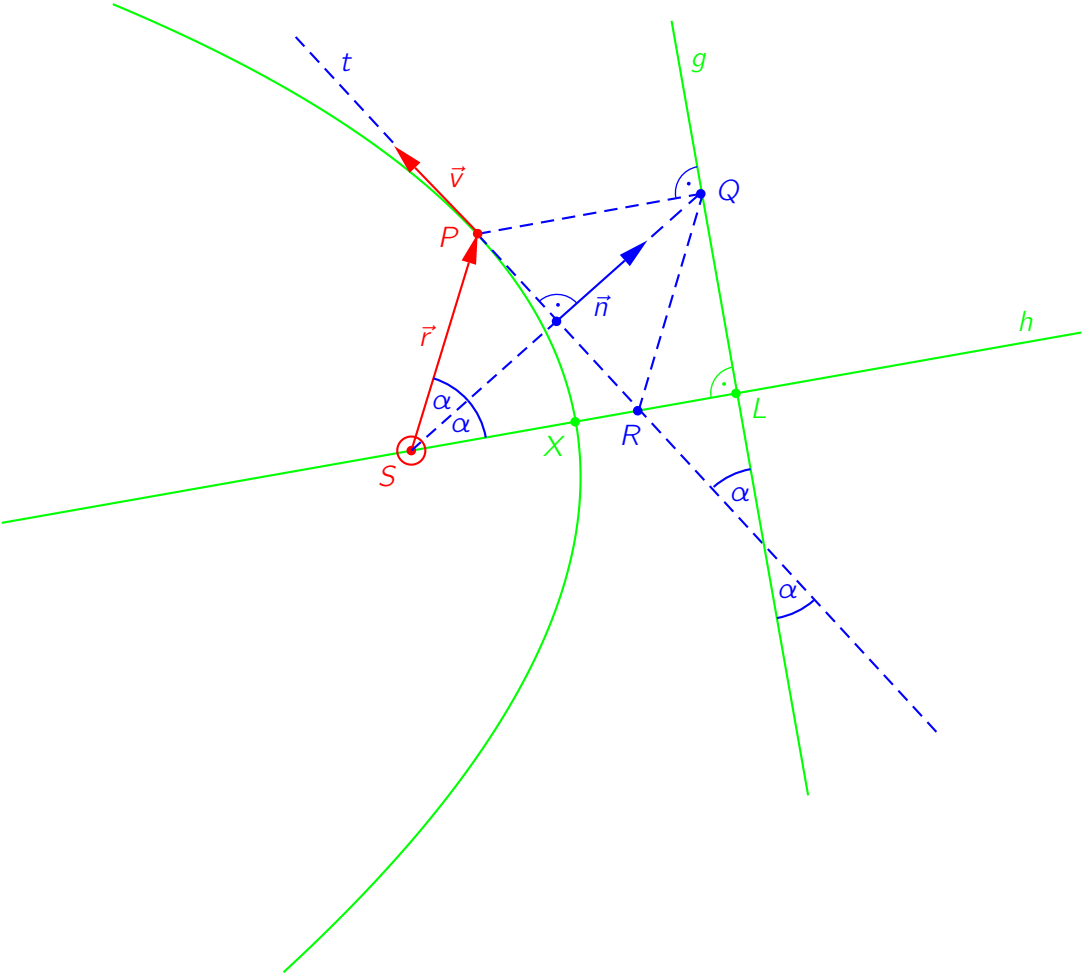


Gegeben:	S	Ort der Sonne
	P	Ort des Kometen zu irgendeinem Zeitpunkt t_0
	\vec{v}	Geschwindigkeit des Kometen zum Zeitpunkt t_0

- Der Energieerhaltungssatz (1) liefert uns immer noch einen Wert für die Konstante $2a$, allerdings ist diese jetzt negativ.
- Wir definieren Q weiterhin durch $\vec{SQ} = \frac{2a}{r} \cdot \vec{r}$. Q liegt jetzt P gegenüber, da $2a$ negativ ist.
- Der Radius des Kreises k mit Zentrum S ist also $-2a$. Dieser Kreis wird uns wieder einen Kreis liefern, auf welchem der Hodograph der Bahn liegt.
- F ist wieder als Spiegelbild von Q bezüglich t definiert.
- Berechnen wir \vec{SF} wieder als Summe von \vec{SQ} und \vec{QF} , so erhalten wir genau denselben Term wie bei (4).
- Nach der Rechnung im Abschnitt 8 ist also \vec{SF} weiterhin unabhängig von der Zeit. Alle Paare $r(t)$, $v(t)$ liefern denselben Vektor \vec{SF} .
- Für den Punkt P gilt zu jedem Zeitpunkt $|\vec{SP}| - |\vec{PF}| = |\vec{SP}| - |\vec{PQ}| = -|\vec{SQ}| = 2a$. Die Bahn des Körpers im Gravitationsfeld von S ist damit ein Hyperbelast.
- Bewegt sich P durch diesen Hyperbelast, so bewegen sich die zugehörigen Punkte Q auf dem Bogen \widehat{AB} des Kreises k .
- Die Spitzen der Vektoren \vec{FQ} liegen auf dem Bogen \widehat{AB} des Kreises k , wenn man sie alle von F aus abträgt. Entsprechendes müssen auch die Spitzen der Vektoren \vec{n} tun, da diese nach (3) konstante Vielfache von \vec{FQ} sind. Drehen wir dieses Bogenstück um 90° im Gegenuhrzeigersinn, so haben wir den Hodographen dieser Bewegung vor uns (nach Konstruktion von \vec{n} aus \vec{v} im Abschnitt 3).
- Die Exzentrizität ε bestimmt sich durch

$$\frac{|\vec{SZ}|}{|\vec{XZ}|} = \frac{|\vec{SF}|}{2 \cdot |\vec{XZ}|} = \frac{|\vec{SF}|}{|2a|}.$$

10 Der Grenzfall der Parabel



- Gegeben:
- S Ort der Sonne
 - P Ort des Kometen zu irgendeinem Zeitpunkt t_0
 - \vec{v} Geschwindigkeit des Kometen zum Zeitpunkt t_0

a) Konstruktion der Leitgeraden g und der Symmetrieachse h

\vec{r} , \vec{v} , t und \vec{n} seien wie bisher definiert. Eine analoge Konstruktion wie für die Ellipse oder die Hyperbel ist nicht möglich, da der Wert von $2a$ unendlich gross wird. Daher konstruieren wir den Kegelschnitt diesmal über die *Leitgerade*. Und das geht sehr einfach:

Q ist das Spiegelbild von S bezüglich t . Die Leitgerade g ist damit schon durch Q und den Normalenvektor \vec{PQ} definiert. Auch die Symmetrieachse der Parabel (also die Apsidenlinie h) ist durch S und den Richtungsvektor \vec{PQ} schon festgelegt.

Die Punkte $SPQR$ bilden die Ecken eines Rhombus.

Es ist noch zu beweisen, dass die Lage von g und h nicht von den momentanen Werten von \vec{r} und \vec{v} abhängt.

Wenn das aber gilt, dann ist die Bahn des Objekts eine Parabel mit Brennpunkt S und Leitgeraden g , da für jeden Punkt P' der Bahn gilt $|\vec{SP}'| = d(P', g)$.

b) Beweis der Invarianz von g und h

Zuerst einige vorbereitenden Bemerkungen:

Aus dem Energieerhaltungssatz (1) kriegen wir in diesem Fall

$$v^2 = \frac{2 \cdot G \cdot M}{r}.$$

Rechnet man das Skalarprodukt $\vec{r} \cdot \vec{n}$ aus wie bei (3), so erhält man

$$\vec{r} \cdot \vec{n} = r \cdot r \cdot \dot{\varphi} = \ell.$$

Andererseits gilt

$$\vec{r} \cdot \vec{n} = r \cdot n \cdot \cos(\alpha) = r \cdot v \cdot \cos(\alpha).$$

Beide Gleichungen zusammen ergeben

$$\cos(\alpha) = \frac{\ell}{r \cdot v}.$$

Nun können wir den Beweis der Invarianz von g und h in 2 Schritten führen:

i) Wir beweisen, dass die *Richtungen* von h und g invariant sind, indem wir zeigen, dass die Ableitung des Vektors

$$\frac{1}{r} \cdot \vec{PQ} = \frac{1}{r} \cdot \vec{SR}$$

null ist.

ii) Wir zeigen noch, dass der *Betrag* des Vektors \vec{SL} konstant ist.

Beweis von i):

$$\vec{SQ} = 2 \cdot (\vec{r} \cdot \vec{n}) \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \vec{n} = 2 \cdot \ell \cdot \frac{1}{v^2} \cdot \vec{n} = 2 \cdot \ell \cdot \frac{r}{2 \cdot G \cdot M} \cdot \vec{n} = \frac{\ell}{G \cdot M} \cdot r \cdot \vec{n}$$

$$\vec{SR} = \vec{PQ} = \vec{SQ} - \vec{r} = \frac{\ell}{G \cdot M} \cdot r \cdot \vec{n} - r \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \cdot \vec{SR} &= \frac{\ell}{G \cdot M} \cdot \begin{pmatrix} \dot{r} \cdot \sin \varphi + r \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos \varphi \\ -\dot{r} \cdot \cos \varphi + r \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin \varphi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{\ell}{G \cdot M} \cdot \begin{pmatrix} \frac{G \cdot M}{\ell} \cdot \cos \varphi - \dot{r} \cdot \sin \varphi - r \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos \varphi \\ \frac{G \cdot M}{\ell} \cdot \sin \varphi + \dot{r} \cdot \cos \varphi - r \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin \varphi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Das ist (bis auf konstante Faktoren) der Vektor von (4), von welchem im 8. Abschnitt gezeigt wird, dass er invariant ist. Damit ist der erste Teil des Beweises erbracht.

$\frac{1}{r} \cdot \vec{SR}$ ist ein einheitenloser Einheitsvektor, der von S in die Richtung von X , R und L zeigt.

Beweis von ii):

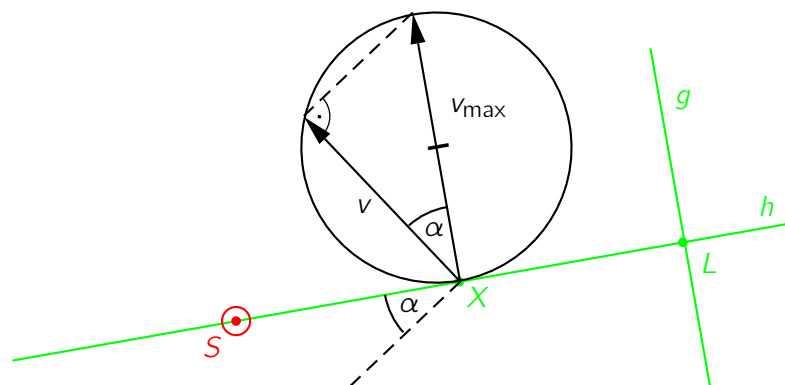
Nun zeigen wir noch, dass der Abstand $|\vec{SL}|$ unabhängig ist von der speziellen Wahl des Bahnpunktes P :

$$|\vec{SL}| = |\vec{SQ}| \cdot \cos(\alpha) = \frac{\ell}{G \cdot M} \cdot r \cdot |\vec{n}| \cdot \frac{\ell}{r \cdot v} = \frac{\ell}{G \cdot M} \cdot r \cdot v \cdot \frac{\ell}{r \cdot v} = \frac{\ell^2}{G \cdot M} = \text{konstant}$$

Somit lässt sich auch der Vektor $\vec{SX} = \frac{1}{2} \cdot \vec{SL}$ berechnen.

c) Der Hodograph der Parabelbahn

Im Unendlichen wird die Geschwindigkeit des Kometen in diesem Fall gerade null, während sie im Punkt X ihren maximalen Wert annimmt.



Wir zeigen, dass gilt $v = v_{\max} \cdot \cos(\alpha)$. Dann müssen die Spitzen aller Geschwindigkeitsvektoren auf dem Kreis mit Durchmesser v_{\max} liegen. Es werden auch alle Punkte erreicht – ausser X selber.

Es gilt

$$\frac{\overline{SL}}{\cos(\alpha)} = \overline{SQ} = 2 \cdot r \cdot \cos(\alpha),$$

also

$$\overline{SL} = 2 \cdot r \cdot \cos^2(\alpha) = 2 \cdot \frac{2 \cdot G \cdot M}{v^2} \cdot \cos^2(\alpha),$$

daraus

$$v = \sqrt{\frac{4 \cdot G \cdot M}{\overline{SL}}} \cdot \cos(\alpha) = k \cdot \cos(\alpha).$$

Aus dem Spezialfall $\alpha = 0$ erhält man $k = v_{\max}$. □

Da wir für \overline{SL} schon den Wert $\frac{\ell^2}{G \cdot M}$ berechnet haben, erhalten wir noch

$$v_{\max} = 2 \cdot \sqrt{\frac{G \cdot M}{\frac{\ell^2}{G \cdot M}}} = 2 \cdot \frac{G \cdot M}{\ell}.$$

Für den Radius des Hodographen ergibt sich damit wieder der Wert von

$$\frac{1}{2} \cdot v_{\max} = \frac{G \cdot M}{\ell}.$$

11 Synopsis

Wir haben den Energieerhaltungssatz (1) zum Ausgangspunkt unserer Betrachtungen gemacht. In allen drei Fällen ($E_{\text{tot}} < 0$, $E_{\text{tot}} > 0$ und $E_{\text{tot}} = 0$) konnten wir die wesentlichen Elemente der Bahn aus der Anfangsposition und der Geschwindigkeit in jener Position *konstruieren*.

Die rechnerische Begründung der Konstruktion führte in allen drei Fällen auf dieselben Ausdrücke, welche geometrisch motiviert sind und oft eine geometrische oder physikalische Interpretation erlauben. Wir möchten noch die Ergebnisse für alle drei Fälle zusammenfassen. Die Beweise zu den Behauptungen finden sich mehr oder weniger explizit im vorangegangenen Text.

- Es gilt $\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ell \end{pmatrix}$ mit $\ell = r^2 \cdot \dot{\varphi} = \text{konstant}$.

Das ist das zweite Kepler'sche Gesetz von der konstanten „Flächengeschwindigkeit“ oder der Erhaltungssatz für den Bahndrehimpuls. Die Aussage ist äquivalent dazu, dass die wirkende Kraft eine Zentralkraft ist.

- Die Geschwindigkeit $v_h = \frac{G \cdot M}{\ell} = r \cdot \dot{\varphi} - \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}}$ ist konstant. Sie ist in jedem Fall gleich dem Radius des Hodographen.
- Aus dem Grenzfall der Parabel ergibt sich mit der Perihel-Geschwindigkeit v_p :

$v_p > 2 \cdot v_h \iff$ die Bahn ist eine Hyperbel

$v_p = 2 \cdot v_h \iff$ die Bahn ist eine Parabel

$v_p < 2 \cdot v_h \iff$ die Bahn ist eine Ellipse

In allen drei Fällen gilt $v_p = v_h \cdot (1 + \varepsilon)$, wo ε für die Exzentrizität steht.

- Der konstante einheitenlose Vektor \vec{k} mit

$$\vec{k} = \frac{\ell}{G \cdot M} \cdot \vec{n} - \frac{1}{r} \cdot \vec{r}$$

zeigt vom Kraftzentrum, also von der Sonne zum Perihel der Bahn. Zudem gilt in allen drei Fällen $|\vec{k}| = \varepsilon$.

\vec{k} ist proportional zum Laplace-Runge-Lenz-Vektor. Hier ist er geometrisch motiviert als Vielfaches des Vektors \vec{SF} .

- Für die Perihel-Distanz r_p gilt $r_p \cdot v_p = \ell$. Zusammen mit $v_p = v_h \cdot (1 + \varepsilon)$ und $v_h = \frac{G \cdot M}{\ell}$ ergibt sich

$$r_p = \frac{\ell}{v_p} = \frac{\ell}{v_h \cdot (1 + \varepsilon)} = \frac{\ell^2}{G \cdot M \cdot (1 + \varepsilon)}$$