Herleitung des Gravitationsgesetzes aus den drei Keplergesetzen

Im folgenden Skript wird erläutert, weshalb aus den drei Keplerschen Gesetzen das Gravitationsgesetz folgt. Die Keplerschen Gesetze lauten folgendermassen:

1. Kepler-Gesetz (K1)
   Die Planeten bewegen sich auf elliptischen Bahnen in deren gemeinsamen Brennpunkt die Sonne steht.

2. Kepler-Gesetz (K2)
   Ein von der Sonne zum Planeten gezogener "Fahrstrahl" überstreicht in gleichen Zeiten gleich große Flächen.

3. Kepler-Gesetz (K3)
   Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen der großen Bahnhalbachsen.

1. Abschnitt - Zentralbeschleunigung

Zuerst betrachten wir die Beziehung zwischen Kartesischen und Polarkoordinaten:

$$x = r\cos(\varphi) \qquad\qquad y = r\sin(\varphi)$$

Damit kann die Position eines Körpers auf einer elliptischen Bahn in Abhängigkeit von dem Abstand zum Zentralkörper (r) und dem Winkel zur grossen Halbachse bestimmt. Leitet man diese Therme zweimal nach der Zeit ab erhält man die Beschleunigung in der x- bzw. y-Richtung.

$$\dot{x} = \dot{r}\cos(\varphi) - r\sin(\varphi) * \dot{\varphi}$$

$$\dot{y} = \dot{r}\sin(\varphi) - r\cos(\varphi) * \dot{\varphi}$$

$$\ddot{x} = \ddot{r}\cos(\varphi) - 2\dot{r}\sin(\varphi) * \dot{\varphi} - r\cos(\varphi) * \dot{\varphi}^2 - r\sin(\varphi) * \ddot{\varphi}$$

$$\ddot{y} = \ddot{r}\sin(\varphi) - 2\dot{r}\cos(\varphi) * \dot{\varphi} - r\sin(\varphi) * \dot{\varphi}^2 - r\cos(\varphi) * \ddot{\varphi}$$

Wenn man diese Ausdrücke quadriert und anschliessend addiert ergibt dies nach dem Superpositionsprinzip die Gesamtbeschleunigung im Quadrat. Dabei heben sich einige Summanden weg und mit der goniometrischen Umformung $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ können alle Sinus- und Kosinus-Funktionen eliminiert werden. Somit erhält man schlussendlich:

$$\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 = \ddot{r}^2 + 4\dot{r}^2 * \dot{\varphi}^2 + r^2\dot{\varphi}^4 + r^2\ddot{\varphi}^2 - 2\ddot{r}r\dot{\varphi}^2 + 4\dot{r}r\dot{\varphi}\ddot{\varphi}$$

$$\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 = (\ddot{r} - r * \dot{\varphi}^2)^2 + (2\dot{r} * \dot{\varphi} - r * \ddot{\varphi})^2$$

Im Skript von Herrn Gubler zu den Keplerschen Gesetzen haben wir bereits bewiesen, dass die Bahn eines Körpers in einem zentralen Kraftfeld eben ist. Setzt man dies voraus, so lässt sich aus dem zweiten Keplerschen Gesetz (K2) schliessen, dass die Beschleunigung eines Planeten immer zur Sonne gerichtet ist. Um dies zu beweisen betrachten wir zuerst die überstrichene Fläche:

$$\frac{1}{2}r * r * \dot{\varphi} = \frac{1}{2}r^2 * \dot{\varphi} = c\ (konstant)$$

Da die überstrichene Fläche pro Zeiteinheit konstant ist, muss die erste Ableitung für die Funktion des Flächenstücks nach der Zeit null sein.

$$\dot{c} = 0$$

$$r * \dot{r} * \dot{\varphi} + \frac{1}{2}r^2 * \ddot{\varphi} = 0$$

$$2\dot{r} * \dot{\varphi} + r * \ddot{\varphi} = 0$$

Wenn dies nun auf unsere vorangegangenen Gleichungen für $\ddot{x}$ und $\ddot{y}$ angewendet wird, so erhalten wir für das Verhältnis $\frac{\ddot{y}}{\ddot{x}} = \tan(\varphi)$. Dies belegt, dass die Beschleunigung nur in die zentrale Richtung zeigt

$$\ddot{x} = (\ddot{\mathrm{r}} - \mathrm{r} * \dot{\varphi}^2) * \cos(\varphi) - (2\dot{r} * \dot{\varphi} + r * \ddot{\varphi}) * \sin(\varphi) = (\ddot{\mathrm{r}} - \mathrm{r} * \dot{\varphi}^2) * \cos(\varphi)$$

$$\ddot{y} = (\ddot{\mathrm{r}} - \mathrm{r} * \dot{\varphi}^2) * \sin(\varphi) - (2\dot{r} * \dot{\varphi} + r * \ddot{\varphi}) * \cos(\varphi) = (\ddot{\mathrm{r}} - \mathrm{r} * \dot{\varphi}^2) * \sin(\varphi)$$

$$\frac{\ddot{y}}{\ddot{x}} = \frac{(\ddot{\mathrm{r}} - \mathrm{r} * \dot{\varphi}^2) * \sin(\varphi)}{(\ddot{\mathrm{r}} - \mathrm{r} * \dot{\varphi}^2) * \cos(\varphi)} = \tan(\varphi)$$

Somit sind folgende drei Aussagen äquivalent:

i. Es wirkt nur eine Zentralkraft längs r
ii. Keplers Flächensatz
iii. $2\dot{r} * \dot{\varphi} + r * \ddot{\varphi} = 0$

2. Abschnitt – zweite Ableitung von r

Die zweite Ableitung von r bestimmt die Beschleunigung eines Körpers auf einer elliptischen Bahn in Abhängigkeit des Winkels φ. Dafür starten wir mit der Ellipsengleichung, welche Julia Lenz in ihrem Projekt hergeleitet hat:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{\varepsilon}{p} * \cos(\varphi)$$

Dabei gilt:

$$\varepsilon = \sqrt{(1 - \left(\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}\right)^2)}$$

$$p = \frac{b^2}{a}$$

Die Ellipsengleichung einmal abgeleitet nach der Zeit ergibt:

$$-\frac{1}{r^2} * \dot{r} = -\frac{\varepsilon}{p} * \sin(\varphi) * \dot{\varphi}$$

Nach einer einfachen Umformung sowie das Einsetzen von c aus dem ersten Abschnitt erhalten wir:

$$\dot{r} = \frac{\varepsilon}{p} * \sin(\varphi) * r^2\dot{\varphi} \qquad \dot{r} = \frac{\varepsilon}{p} * \sin(\varphi) * 2c$$

Nun leiten wir den Ausdruck nochmals nach der Zeit ab und vereinfachen:

$$\ddot{r} = \frac{\varepsilon}{p} * \cos(\varphi) * \dot{\varphi} * 2c$$

$$\ddot{r} = \frac{\varepsilon}{p} * \cos(\varphi) * \frac{2c}{r^2} * 2c \qquad \ddot{r} = \frac{4c^2\varepsilon}{p * r^2} * \cos(\varphi)$$

3. Abschnitt – Anziehungskraft

In einem zentralen Kraftfeld gilt der Energieerhaltungssatz:

Entfernt sich der Planet von der Sonne, muss die kinetische Energie entsprechend abnehmen.

$$\int F(r) * dr + Ekin = Etot = konstant$$

Dabei entspricht $F(r) * dr$ der potentiellen Energie. Dies können wir nun weiter vereinfachen.

$$\int F(r) * dr = Etot - \frac{1}{2} * m * v^2$$

$$\int F(r) * dr = Etot - \frac{1}{2} * m * (\dot{r}^2 + \frac{\varkappa^2}{r^2})$$

Diese Gleichung abgeleitet liefert für E_{tot} =konstant und $\varkappa$=konstant:

$$F(r) = 0 - \frac{1}{2} * m * (2 * \dot{r} * \frac{d\dot{r}}{dr} - 2 * \frac{\varkappa^2}{r^3})$$

$$F(r) = m * (\frac{\varkappa^2}{r^3} - \dot{r} * \frac{d}{dr}(\dot{r}))$$

Ausserdem gilt:

$$\dot{r} * \frac{d\dot{r}}{dr} = \frac{dr}{dt} * \frac{d}{dr} * (\frac{dr}{dt})$$

$$\frac{dr}{dt} * \frac{d^2 * r}{dt * dr} = \frac{d^2r}{(dt)^2} = \ddot{r}$$

Daraus, und weil $\varkappa = 2c$ ist, lässt sich schlussendlich folgende Formel zusammensetzen:

$$F(r) = m(\frac{4c^2}{r^3} - \ddot{r})$$

4. Abschnitt – Zusammenfügen

Setzt man die zweite Ableitung von r nach der Zeit in die Gleichung aus dem vorangegangenen Abschnitt ein, so erhält man:

$$F(r) = m(\frac{4c^2}{r^3} - \frac{4c^2\varepsilon}{p * r^2} * \cos(\varphi))$$

$$F(r) = m * \frac{4c^2}{r^2}(\frac{1}{r} - \frac{\varepsilon}{p} * \cos(\varphi))$$

Nun wenden wir die Ellipsengleichung aus dem 2. Abschnitt an und erhalten:

$$F(r) = m * \frac{4c^2}{r^2} * \frac{1}{p} = \frac{4c^2 * m}{p * r^2}$$

5. Abschnitt – Unabhängigkeit von c und p

Um unser Ziel, das Gravitationsgesetz, zu erreichen müssen wir noch beweisen, dass c und p nicht vom Planeten abhängig sind. Dazu Berechnen wir zuerst die Umlaufzeit T aus der Ellipsenfläche und der Flächengeschwindigkeit c.

$$Ellipsenfläche = \pi * a * b$$

$$T = \frac{\pi ab}{c}$$

Nach dem dritten Keplerschen Gesetz ist der Ausdruck $\frac{T^2}{a^3}$ für verschiedene Körper mit dem gleichen Zentralkörper gleich und somit unabhängig vom Planten.

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{\pi^2 * b^2}{c^2 * a}$$

Ersetzt man nun $\frac{b^2}{a}$ durch p, gemäss den Eigenschaften einer Ellipse, wird klar das sowohl c wie auch p vom Planeten unabhängig sind.

$$\frac{T^2}{a^3} = \pi^2 * \frac{p}{c^2}$$

6. Abschnitt – Ziel erreicht

Mit den Erkenntnissen aus dem fünften Abschnitt können wir nun getrost die folgende Substitution vornehmen:

$$\frac{4c^2}{p} = \lambda$$

Wenn wir dies nun in die Gleichung aus dem vierten Abschnitt einsetzen, haben wir unser Ziel erreicht und die Formel für die Gravitationskraft gefunden:

$$F = \lambda * \frac{m}{r^2}$$