

Herleitung der Keplergesetze aus dem Gravitationsgesetz

(nach Hans Roth, „Sternschnuppen“, DMK Themenheft Astronomie, Orell Füssli Verlag 1996)

1. Etwas Vektoranalysis
2. Bahnen in zentralen Kraftfeldern sind eben
3. Der Flächensatz
4. Die Gesamtenergie
5. Ein nützlicher Einheitsvektor
6. Die entscheidende Invariante
7. Bahnen in $1/r^2$ -Kraftfeldern sind Kegelschnitte
8. Exzentrizität und Gesamtenergie
9. Das dritte Gesetz von Kepler in einer ersten Fassung
10. Eine notwendige Korrektur
11. Rücken wir die Sonne wieder ins Zentrum
12. Das dritte Keplergesetz in seiner allgemeinen Form

Version 1.0, vom 22. März 2011

Ausgearbeitet von Martin Gubler, Kantonsschule Frauenfeld, anno 2001

Mit \LaTeX in eine lesbare Form gebracht von Alfred Hepp im März 2011

1 Etwas Vektoranalysis

Es gelten die folgenden Rechenregeln:

- a) $(\vec{a} \cdot \vec{b})' = \vec{a}' \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{b}'$
- b) $(\vec{a} \times \vec{b})' = \vec{a}' \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{b}'$
- c) $\vec{a} \cdot \vec{a}' = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}'| = a \cdot a'$ (wir schreiben allgemein v für $|\vec{v}|$)
- d) $|\vec{a}| = \text{konst.} \Rightarrow \vec{a}' \perp \vec{a}$

Beweis:

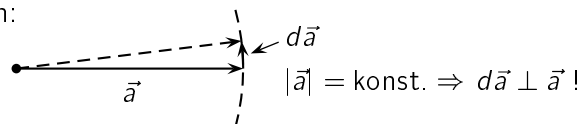
$$\begin{aligned} \text{a) } (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)' &= a_1' \cdot b_1 + a_1 \cdot b_1' + a_2' \cdot b_2 + a_2 \cdot b_2' + a_3' \cdot b_3 + a_3 \cdot b_3' = \\ &= (a_1' \cdot b_1 + a_2' \cdot b_2 + a_3' \cdot b_3) + (a_1 \cdot b_1' + a_2 \cdot b_2' + a_3 \cdot b_3') = \vec{a}' \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{b}' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} a_2 b_3 - b_2 a_3 \\ a_3 b_1 - b_3 a_1 \\ a_1 b_2 - b_1 a_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_2' b_3 + a_2 b_3' - b_2' a_3 - b_2 a_3' \\ a_3' b_1 + a_3 b_1' - b_3' a_1 - b_3 a_1' \\ a_1' b_2 + a_1 b_2' - b_1' a_2 - b_1 a_2' \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_2' b_3 - b_2 a_3' \\ a_3' b_1 - b_3 a_1' \\ a_1' b_2 - b_1 a_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 b_3' - b_2' a_3 \\ a_3 b_1' - b_3' a_1 \\ a_1 b_2' - b_1' a_2 \end{pmatrix} = \vec{a}' \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{b}' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \vec{a} \cdot \vec{a}' &= \frac{1}{2} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{a}' + \vec{a}' \cdot \vec{a}) = \frac{1}{2} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{a})' = \frac{1}{2} \cdot (a^2)' = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (|\vec{a}|^2)' = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{a}'| = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}'| \quad (= a \cdot a') \end{aligned}$$

- d) $|\vec{a}| = \text{konst.} \Rightarrow$ (mit c), elegant und exakt)
 $\vec{a} \cdot \vec{a}' = a \cdot a' = a \cdot 0$, also $\vec{a} \perp \vec{a}'$

oder anschaulich:



2 Bahnen in zentralen Kraftfeldern sind eben

Satz: Die Bahn eines Körpers in einem *zentralen Kraftfeld* ist eben.

Beweis: Sei also $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ parallel zu \vec{r} : $m \cdot \vec{r}'' = \lambda \cdot \vec{r}$.

Dann gilt $\vec{r}'' \parallel \vec{r}$ und daher $\vec{r}'' \times \vec{r} = \vec{0}$. Somit ist für $\vec{w} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{r} \times \vec{v} = \vec{r} \times \vec{r}'$
 $\vec{w}' = (\vec{r} \times \vec{r}')' = \vec{r}' \times \vec{r}' + \vec{r} \times \vec{r}'' = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$.

Wenn aber die Ableitung von \vec{w} konstant $\vec{0}$ ist, so ist \vec{w} selber konstant, $\vec{w} = \vec{r} \times \vec{v}$ ist *invariant*.

\vec{r} und \vec{v} stehen aber immer senkrecht zu \vec{w} , liegen also immer in der Ebene durch den Nullpunkt, die senkrecht ist zu \vec{w} . \square

\vec{w} ist *nicht* mit der Winkelgeschwindigkeit ω zu verwechseln, welche (wie wir gleich sehen werden) keineswegs konstant ist.

Physikalischer gesprochen:

Bewegt sich ein Massenpunkt m am Ort \vec{r} mit \vec{v} , so ist sein *Bahndrehimpuls* bezüglich einer Achse durch $\vec{0}$, die senkrecht steht auf \vec{r} und \vec{v} gleich

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m \cdot \vec{v}) = m \cdot (\vec{r} \times \vec{v}) = m \cdot \vec{w}.$$

Der Bahndrehimpuls kann sich aber in einem zentralen Kraftfeld *nicht* ändern, da das Drehmoment $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ immer $\vec{0}$ ist, da \vec{r} und \vec{F} (anti-)parallel sind!

Somit muss $\vec{\ell} = m \cdot \vec{w}$ in einem solchen Kraftfeld konstant bleiben.

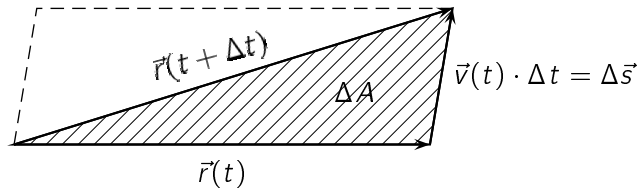
Die Sache ist deutlich komplizierter im System Erde-Mond oder gar Sonne-Erde-Mond, da die Körper nicht fest sind (Gezeitenströme usw.) und auch nicht kugelförmig.

3 Der Flächensatz

Keplers zweites Gesetz (von ihm als erstes gefunden . . .) lautet:

K2 „In gleichen Zeitintervallen überstreicht die Verbindungsstrecke von der Sonne zum Planeten gleiche Flächen.“

Welche Fläche überstreicht diese Verbindungsstrecke in einem kleinen Zeitintervall Δt ?



$$\Delta A = \frac{1}{2} \cdot A_{\square} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{r}(t) \times (\vec{v}(t) \cdot \Delta t)| = \frac{1}{2} \cdot \Delta t \cdot |\vec{r}(t) \times \vec{v}(t)| = \frac{1}{2} \cdot \Delta t \cdot |\vec{w}| = \frac{1}{2} \cdot w \cdot \Delta t$$

Es gilt also $dA = \frac{1}{2} \cdot w \cdot dt$, und w ist konstant!

Die im Zeitintervall $[t_1, t_2]$ überstrichene Fläche ist somit

$$A = \int_{t_1}^{t_2} dA = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} \cdot w \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot w \cdot \int_{t_1}^{t_2} 1 \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot w \cdot (t_2 - t_1)$$

In gleich langen Zeitintervallen werden also tatsächlich gleich grosse Flächen überstrichen.

Das zeigt auch, dass die *Winkelgeschwindigkeit* w variabel sein muss. Wird $|\vec{r}|$ kleiner, so muss nach **K2** die Winkelgeschwindigkeit w grösser werden.

Keplers Flächensatz ist äquivalent dazu dass der Bahndrehimpuls konstant ist.

4 Die Gesamtenergie

Erst jetzt nehmen wir das $1/r^2$ -Gesetz hinzu:

$$\begin{aligned} -\frac{G \cdot M \cdot m}{r^3} \cdot \vec{r} &= m \cdot \vec{r}'' & \left| \begin{array}{l} : m; \\ \cdot \vec{r}' = \vec{v} \end{array} \right. \\ -\frac{G \cdot M}{r^3} \cdot \vec{r} \cdot \vec{r}' &= \vec{r}'' \cdot \vec{r}' = \vec{v} \cdot \vec{v}' \end{aligned}$$

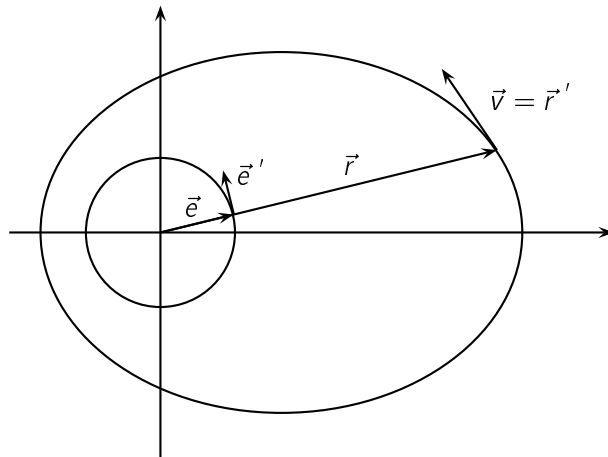
Nach 1 c) ist aber $\vec{r} \cdot \vec{r}' = r \cdot r'$ und $\vec{v} \cdot \vec{v}' = v \cdot v'$. Somit

$$\begin{aligned} -\frac{G \cdot M}{r^3} \cdot r \cdot r' &= v \cdot v' = \frac{1}{2} (v^2)' \\ \frac{1}{2} (v^2)' + \frac{G \cdot M}{r^2} \cdot r' &= 0 \\ \left(\frac{1}{2} \cdot v^2 - \frac{G \cdot M}{r} \right)' &= 0 & \left| \int; \cdot m \right. \\ \frac{1}{2} m v^2 - \underbrace{\frac{G \cdot M \cdot m}{r}} &= \text{konst.} = E_{\text{tot}} \\ E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} &= E_{\text{tot}} \end{aligned}$$

Die Gesamtenergie ist also die zweite Invariante, die wir antreffen (die erste war der Vektor \vec{w}).

Wir haben auf dieser Seite zum ersten Mal das $1/r^2$ -Kraftgesetz benutzt. Es stellt sich die Frage, ob man dieses auch umgekehrt aus den Keplergesetzen herleiten kann. Die Antwort ist „Ja“! Sie finden solche Herleitungen in den Skripten Kepler_02.pdf, Kepler_03.pdf und Kepler_06.pdf.

5 Ein nützlicher Einheitsvektor



Definition: $\vec{e} = \frac{1}{r} \cdot \vec{r}$

- Es gilt $r \cdot \vec{e} = \vec{r}$
- Der Winkel zwischen \vec{e}' und \vec{v} ist immer spitz
- wegen $|\vec{e}| = 1$ folgt nach 1 d) $\vec{e} \perp \vec{e}'$
- \vec{e} liegt wie \vec{r} immer in der Bahnebene, somit liegt auch \vec{e}' in dieser, und es gilt immer $\vec{e} \perp \vec{w}$ und $\vec{e}' \perp \vec{w}$
- es ist $\vec{e}' = \left(\frac{\vec{r}}{r}\right)' = \frac{r \cdot \vec{r}' - r' \cdot \vec{r}}{r^2}$ (Quotientenregel)
- es ist $|\vec{e}'| = \frac{w}{r^2}$ gemäss der folgenden Rechnung:

$$|\vec{e}'| \stackrel{!}{=} |\vec{e}' \times \vec{e}| = \left| \frac{1}{r^2} \cdot (r \cdot \vec{r}' - r' \cdot \vec{r}) \times \vec{e} \right| = \frac{1}{r^2} \cdot \left| r \cdot (\vec{r}' \times \vec{e}) - r' \cdot \underbrace{(\vec{r} \times \vec{e})}_{=\vec{0}} \right| =$$

$$\frac{1}{r} \cdot |\vec{r}' \times \vec{e}| = \frac{1}{r^2} \cdot |\vec{r}' \times \vec{r}| = \frac{1}{r^2} \cdot |\vec{r}' \times \vec{v}| = \frac{w}{r^2}$$

6 Die entscheidende Invariante

Behauptung: $\vec{u} = \frac{\vec{v} \times \vec{w}}{G \cdot M} - \vec{e}$ ist ein konstanter Vektor in der Bahnebene.

\vec{u} liegt sicher in der Bahnebene, da $\vec{v} \times \vec{w} \perp \vec{w}$ und gemäss 5 auch $\vec{e} \perp \vec{w}$.

Wir zeigen nun die Konstanz von \vec{u} durch $\vec{u}' = \vec{0}$:

$$\begin{aligned}\vec{u}' &= \frac{1}{G \cdot M} \cdot (\vec{v}' \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}') - \vec{e}' && \text{es ist aber } \vec{w}' = \vec{0} \\ &= \frac{1}{G \cdot M} \cdot (\vec{r}'' \times \vec{w}) - \vec{e}' \\ &= \frac{1}{G \cdot M} \cdot \left(-\frac{G \cdot M}{r^3} \cdot \vec{r} \times \vec{w} \right) - \vec{e}' && \text{nach dem Kraftgesetz von Newton *)} \\ &= -\frac{G \cdot M}{G \cdot M} \cdot \frac{1}{r^3} \cdot (\vec{r} \times \vec{w}) - \vec{e}' \\ &= +\frac{1}{r^3} \cdot (\vec{w} \times \vec{r}) - \vec{e}' \\ &= \frac{1}{r^2} \cdot (\vec{w} \times \vec{e}) - \vec{e}'\end{aligned}$$

Diese beiden Summanden sind aber identisch:

- beide stehen \perp auf \vec{w} und \perp auf \vec{e}
- beide haben den Betrag $\frac{w}{r^2}$
- beide zeigen in dieselbe Richtung (etwa jene von \vec{v}), haben also denselben Richtungssinn.

Es ist also $\vec{u}' = \vec{0}$ und damit $\vec{u} = \text{konstant}$. □

*) Hier braucht man das $1/r^2$ -Kraftgesetz. Für jeden andern Exponenten als 2 ergibt sich, dass \vec{u} *nicht* konstant ist, dass also die Apsidenlinie nicht fest liegt im Raum. Deren Stabilität ist also ein experimenteller Beweis dafür, dass der Exponent nicht von 2 abweicht!

7 Bahnen im $1/r^2$ -Kraftfeld sind Kegelschnitte

Mit dem Vektor $\vec{u} = \frac{\vec{v} \times \vec{w}}{G \cdot M} - \vec{e}$ gilt nun

a) $\vec{u} \cdot \vec{r} = u \cdot r \cdot \cos \varphi$

b)
$$\vec{u} \cdot \vec{r} = \left(\frac{\vec{v} \times \vec{w}}{G \cdot M} - \vec{e} \right) \cdot \vec{r} = \frac{\vec{v} \times \vec{w}}{G \cdot M} \cdot \vec{r} - \vec{e} \cdot \vec{r} = \frac{1}{G \cdot M} \cdot \vec{r} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) - r \cdot \vec{e} \cdot \vec{e}$$

$$\stackrel{!}{=} \frac{1}{G \cdot M} \cdot (\vec{r} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} - r \cdot 1 = \frac{1}{G \cdot M} \cdot \vec{w} \cdot \vec{w} - r = \frac{w^2}{G \cdot M} - r$$

Zudem ist $|\vec{u}| = u = \text{konstant}$.

a) und b) ergeben $u \cdot r \cdot \cos \varphi = \frac{w^2}{G \cdot M} - r$.

Definieren wir die 2 Konstanten (!) $\varepsilon := |\vec{u}| = u$ und $p := \frac{w^2}{G \cdot M}$, erhalten wir

$$r \cdot \varepsilon \cdot \cos \varphi = p - r$$

$$r \cdot (1 + \varepsilon \cdot \cos \varphi) = p$$

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cdot \cos \varphi}$$

Das ist aber wegen $\varepsilon = u = |\vec{u}| \geq 0$ die Polarform eines Kegelschnittes. □

Da φ der Winkel zwischen \vec{u} und \vec{r} ist, ist \vec{u} der Vektor, der vom Nullpunkt zum Scheitelpunkt des Kegelschnittes zeigt. Bei der Ellipse eines Planeten zeigt \vec{u} also von der Sonne zum sonnennächsten Punkt der Bahn, dem sogenannten Perihel.

$\stackrel{!}{=}$) Beide Terme entsprechen dem Spatprodukt $[\vec{r}, \vec{v}, \vec{w}]$

8 Exzentrizität und Gesamtenergie

Aus der Geometrie wissen wir:

$$\begin{array}{ll}
 \varepsilon > 1 & \longrightarrow \text{Hyperbelbahn} \\
 \varepsilon = 1 & \longrightarrow \text{Parabelbahn} \\
 0 < \varepsilon < 1 & \longrightarrow \text{Ellipsenbahn} \\
 \varepsilon = 0 & \longrightarrow \text{Kreisbahn, } \vec{u} \text{ ist dann 0.}
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} \varepsilon > 1 \\ \varepsilon = 1 \\ 0 < \varepsilon < 1 \\ \varepsilon = 0 \end{array}} \right\} \text{einmalige Gäste im Sonnensystem!}$$

Die Exzentrizität ε entscheidet auch über die Gesamtenergie des Körpers:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon^2 - 1 &= \vec{u}^2 - 1 \\
 &= \left(\frac{\vec{v} \times \vec{w}}{G \cdot M} - \vec{e} \right)^2 - 1 \\
 &= \left(\frac{\vec{v} \times \vec{w}}{G \cdot M} \right)^2 - \frac{2 \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{e}}{G \cdot M} + \vec{e}^2 - 1 && \left| \vec{e}^2 = 1 \right. \\
 &= \frac{v^2 \cdot w^2}{(G \cdot M)^2} - \frac{2}{G \cdot M} \cdot \vec{e} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) && \left| \vec{v} \perp \vec{w} \right. \\
 &= \frac{v^2 \cdot w^2}{G^2 \cdot M^2} - \frac{2}{r \cdot G \cdot M} \cdot \vec{r} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) \\
 &= \frac{v^2 \cdot w^2}{G^2 \cdot M^2} - \frac{2}{r \cdot G \cdot M} \cdot (\vec{r} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} && \left| \vec{r} \times \vec{v} = \vec{w} \right. \\
 &= \frac{v^2 \cdot w^2}{G^2 \cdot M^2} - \frac{2 \cdot w^2}{r \cdot G \cdot M} = \frac{2 \cdot w^2}{G^2 \cdot M^2} \left(\frac{v^2}{2} - \frac{G \cdot M}{r} \right) \\
 &= \frac{2 \cdot w^2}{G^2 \cdot M^2} \cdot \left(\frac{E_{\text{kin}}}{m} + \frac{E_{\text{pot}}}{m} \right) = \frac{2 \cdot w^2}{G^2 \cdot M^2 \cdot m} \cdot E_{\text{total}}
 \end{aligned}$$

$$E_{\text{total}} > 0 \iff \varepsilon > 1 \iff \text{Hyperbelbahn}$$

$$E_{\text{total}} = 0 \iff \varepsilon = 1 \iff \text{Parabelbahn}$$

$$E_{\text{total}} < 0 \iff \varepsilon < 1 \iff \text{Ellipsenbahn}$$

Der letzte Fall trifft auf die Planeten zu, welche im Gravitationsfeld der Sonne 'gefangen' sind. Damit haben wir das erste Kepler'sche Gesetz bewiesen:

K1 „Die Bahnen der Planeten sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.“

9 Das dritte Gesetz von Kepler in einer ersten Fassung

K3 „Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer grossen Bahnhalbachsen.“

Nach dem Flächensatz 3 ist $dA = \frac{1}{2} \cdot w \cdot dt$.

Integrieren wir das für eine ganze Umlaufzeit T , d.h. von 0 bis T , so müssen wir die ganze Ellipsenfläche erhalten:

$$\begin{aligned} \pi \cdot a \cdot b &= \frac{1}{2} \cdot w \cdot (T - 0) && \left| \cdot 2 \right. \\ \pi^2 \cdot a^2 \cdot b^2 &= \frac{1}{4} \cdot w^2 \cdot T^2 \end{aligned}$$

In 7 haben wir definiert $p = \frac{w^2}{G \cdot M}$, andererseits gilt für das Quermass $p = \frac{b^2}{a}$.

Eingesetzt:

$$\begin{aligned} \pi^2 \cdot a^2 \cdot a \cdot p &= \frac{1}{4} \cdot p \cdot G \cdot M \cdot T^2 && \left| : p \right. \\ \pi^2 \cdot a^3 &= \frac{1}{4} \cdot G \cdot M \cdot T^2 \end{aligned}$$

und daraus

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G \cdot M}{4\pi^2} = \text{konstant} \quad *) \quad \square$$

$G \sim$ Gravitationskonstante

$M \sim$ Masse des Zentralkörpers im Nullpunkt

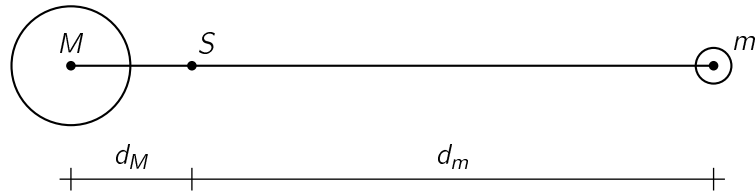
$a \sim$ grosse Ellipsen-Halbachse

$T \sim$ Umlaufzeit des Planeten

*) Aus den Werten von a und T lässt sich offenbar die Masse M des Zentralgestirns berechnen! Sie wissen damit, wie man die Masse des Jupiter oder diejenige der Sonne bestimmen kann.

10 Eine notwendige Korrektur

Nach Newtons Wechselwirkungsgesetz (actio = reactio) wird nicht nur der Planet von der Sonne, sondern auch diese vom Planeten angezogen. Tatsächlich bewegen sich die Schwerpunkte der beiden Körper um den Schwerpunkt S des Gesamtsystems:



Es gilt $M \cdot d_M = m \cdot d_m$, also, mit $r = d_M + d_m$

$$\frac{r}{d_m} = \frac{d_m + d_M}{d_m} = \frac{d_m + \frac{m}{M} \cdot d_m}{d_m} = \frac{1 + \frac{m}{M}}{1} = \frac{M + m}{M} = 1 + \frac{m}{M}$$

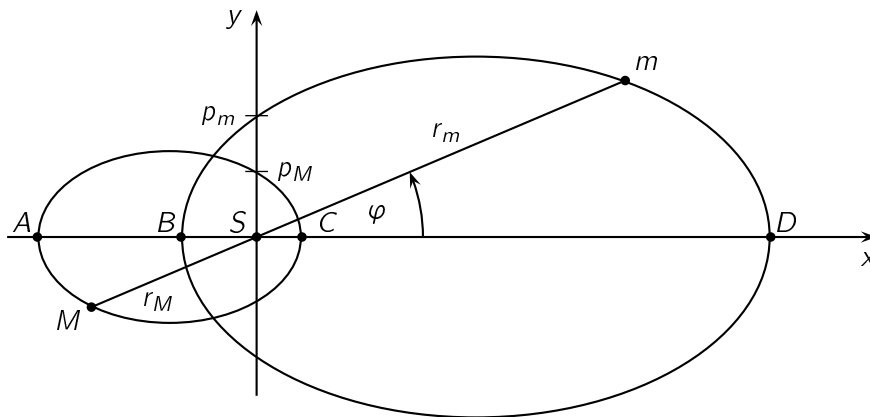
Der Abstand des Planeten von der Sonne ist also um den Faktor $1 + \frac{m}{M} = \frac{M+m}{M}$ grösser als derjenige vom Schwerpunkt S , in welchen wir den Nullpunkt des Bezugssystems und damit das Kraftzentrum gelegt haben.

Den kleineren Abstand von S können wir mit einem korrigierten Wert der Gravitationskonstanten kompensieren:

Mit $G' = G \cdot \left(\frac{M}{M+m}\right)^2$ stimmt der Betrag der Kraft wieder, auch wenn wir mit dem Abstand d_m von O statt r rechnen! So erhalten wir quantitativ korrekte Ergebnisse für die Ellipsenbahnen der *beiden* Körper bezüglich dem Nullpunkt in S .

Nebenbei: Für die Erde und die Sonne gilt $\frac{M}{M+m} \approx 0.999'997 \dots$

11 Rücken wir die Sonne wieder ins Zentrum



$b' = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC}$ sei die grosse Halbachse der von M beschriebenen Ellipse, $a' = \frac{1}{2} \cdot \overline{BD}$ sei diejenige der Bahnellipse des leichteren Körpers m .

Nach 10 gilt jederzeit $\overline{MS} \cdot M = \overline{mS} \cdot m$, die beiden Ellipsen sind also ähnlich mit dem Streckungsfaktor $\frac{m}{M}$.

Es ist also $b' = \frac{m}{M} \cdot a'$ und $r = (r_m + r_M) = r_m \left(1 + \frac{m}{M}\right)$.

Bezüglich dem Nullpunkt M beschreibt also m ebenfalls eine Ellipse:

$$\begin{aligned} r(\varphi) &= \overline{Mm}(\varphi) = r_m(\varphi) \cdot \left(1 + \frac{m}{M}\right) \\ &= \frac{p_m}{1 + \varepsilon \cdot \cos(\varphi + 180^\circ)} \cdot \left(1 + \frac{m}{M}\right) = \frac{p_m \cdot \left(1 + \frac{m}{M}\right)}{1 - \varepsilon \cdot \cos \varphi} \end{aligned}$$

Das Minuszeichen im Nenner des letzten Terms zeigt nur an, dass das Perihel hier links vom Nullpunkt liegt. Der maximale Abstand der beiden Körper ist \overline{AD} , der minimale ist \overline{BC} . Für diese Ellipse gilt also

$$2a = \overline{AD} + \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{BD} + \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{BD} = 2 \cdot b' + 2 \cdot a'$$

$$\text{Somit } a = a' + b' = a' \cdot \left(1 + \frac{m}{M}\right) = a' \cdot \left(\frac{M + m}{M}\right)$$

$$\text{oder } a' = a \cdot \frac{M}{M + m}$$

Beobachtet man ein Doppelsternsystem, so kann man also aus den gemessenen Bahnparametern das Verhältnis der Massen bestimmen.

12 Das dritte Keplergesetz in seiner allgemeinen Form

Zwei Körper sollen gravitativ aneinander gebunden sein. Beide laufen also auf einer Ellipse um den gemeinsamen Schwerpunkt, die beiden grossen Halbachsen bezeichnen wir mit a' und b' .

Nach 10 müssen wir aber die Gravitationskonstante G korrigieren zu G' , damit wir mit dem Abstand vom Nullpunkt rechnen dürfen, der ja kleiner ist als der Abstand der beiden Körper voneinander.

In 11 haben wir erkannt, dass m auch eine Ellipse beschreibt um den Schwerpunkt des andern Körpers M . Diese Ellipse habe die grosse Halbachse a , und wir kennen das Verhältnis von a und a' .

Jetzt setzen wir diese Teile zusammen. Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{a^3}{T^2} &= \frac{a'^3 \cdot \left(\frac{M+m}{M}\right)^3}{T^2} = \frac{(M+m)^3 \cdot a'^3}{M^3 \cdot T^2} \stackrel{!}{=} \frac{(M+m)^3}{M^3} \cdot \frac{G' \cdot M}{4\pi^2} \\ &= \frac{(M+m)^3}{M^2} \cdot \frac{G \cdot \frac{M^2}{(M+m)^2}}{4\pi^2} = \frac{(M+m) \cdot G}{4\pi^2}\end{aligned}$$

und wir haben das dritte Kepler'sche Gesetz in seiner allgemeinen Form gefunden:

$$\boxed{\frac{a^3}{T^2} = \frac{G \cdot (m + M)}{4 \cdot \pi^2}}$$

Die Formel ist jetzt bezeichnenderweise auch symmetrisch in m und M .

Beobachtet man ein Doppelsternsystem lange genug, so kann man also die Summe der Massen und das Verhältnis der beiden Massen bestimmen. Damit kennt man dann die Massen der beiden Partner absolut!