

(A4) Kleiner Exkurs: Der Teilerverband einer natürlichen Zahl

\mathbb{T}_n soll die Menge aller Teiler von $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen.

Beispiele: $\mathbb{T}_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

$\mathbb{T}_{36} = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$ *)

$\mathbb{T}_{60} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$

Welche Operationen könnten in \mathbb{T}_n die Rolle von \cap und \cup übernehmen??

$\Rightarrow \text{ggT}(a, b)$ und $\text{kgV}(a, b)$!

Wer hat die Rolle der Neutrallemente? (Sätze ④, ⑤)

$\Rightarrow G \triangleq n$; $\emptyset \triangleq 1$

Aufgabe: Prüfen Sie, ob ①, ②, ③, ④, ⑤, ⑦ und ⑧ gültig sind !!

Lösung:

- ① und ② logo! ✓✓
- ③ nicht trivial, aber ✓
- ④ $\text{ggT}(k, n) = k$, $\text{kgV}(k, 1) = k$ ✓✓
- ⑤ $\text{ggT}(k, 1) = 1$, $\text{kgV}(k, n) = n$ ✓✓
- ⑦ $\text{ggT}(k, k) = k$, $\text{kgV}(k, k) = k$ ✓✓
- ⑧ $\text{ggT}(k, \text{kgV}(k, e)) = k$
 $\text{kgV}(k, \text{ggT}(k, e)) = k$ ✓✓

Bei den weiteren Sätzen ⑥, ⑨ und ⑩ brauche wir eine Entscheidung zur Negation!? Vorüberleg?

* 'schöne' Darstellung von \mathbb{T}_{36} ?! \rightarrow weiter hinten!

Haben Sie noch einen Vorschlag für eine 'Negation' oder die Bildung eines 'Komplements'?

Also eine Entsprechung zu $\text{NOT}(x)$ resp. \bar{A} ??

Es sollten wenn möglich die Sätze (6), (9) und (10) erfüllt sein:

$$\begin{array}{l} \textcircled{6} \quad \left. \begin{array}{l} \text{ggT}(a, \bar{a}) = 1 \\ \text{kgV}(a, \bar{a}) = n \end{array} \right\} \begin{array}{l} ? \\ \cdot \\ ? \end{array} \\ \textcircled{9} \quad \left. \begin{array}{l} \overline{\text{ggT}(a, b)} = \text{kgV}(\bar{a}, \bar{b}) \\ \overline{\text{kgV}(a, b)} = \text{ggT}(\bar{a}, \bar{b}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} ? \\ \cdot \\ ? \end{array} \\ \textcircled{10} \quad \bar{\bar{a}} = a \end{array}$$

Idee: Wir definieren für alle $a \in \mathbb{T}_n$

$$\bar{a} := n \text{ div } a = \frac{n}{a} = b \text{ mit } a \cdot b = n$$

gelten nun (10), (9) und (6) ??

$$\textcircled{10} \quad \bar{\bar{a}} = \bar{b} \text{ mit } a \cdot b = n$$

$$\text{und } \bar{b} = a \text{ wegen } a \cdot b = n \quad \checkmark \checkmark$$

(9) Die beiden Sätze von de Morgan sind erfüllt !!
(\rightarrow separates Blatt A4-3 !)

(6) Mit dem Beispiel $a=5$ in $\mathbb{T}_{25} = \{1, 5, 25\}$ lässt sich zeigen, dass (6) i.A. nicht erfüllt ist:

$$\bar{5} = 25 \text{ div } 5 = 5, \text{ also}$$

$$\text{ggT}(5, \bar{5}) = \text{ggT}(5, 5) = 5 \neq 1$$

$$\text{kgV}(5, \bar{5}) = \text{kgV}(5, 5) = 5 \neq 25 = n$$

