Dauer der Prüfung: 60 Minuten.
Erlaubte Hilfsmittel: Eigene, angereicherte Formelsammlung DMK/DPK und der in der Klasse bisher benutzte Taschenrechner.

1. "Ich wenigstens kenne keine voll befriedigende Erklärung dafür, warum jede ungerade Zahl (von 3 an), mit sich selber multipliziert, stets ein Vielfaches von 8 mit 1 als Rest ergibt."
   Erich Bischoff, Erforscher der Kabbalah, 1920 (nach Beutelspacher)
   a) Formulieren Sie diese Aussage als Gleichung in Z_8 .
   b) Beweisen Sie die Behauptung (elementare Zahlentheorie) .

2. Wir betrachten Z_8, Z_5 und $Z_8 \times Z_5$ (-> Ihr Modell !)
   a) Bilden Sie P_8 und P_5, das sind die multiplikativen Gruppen derjenigen Elemente von Z_8 resp. Z_5, welche ein multiplikatives Inverses besitzen.
   b) Stellen Sie die Gruppentafeln von P_8 und P_5 auf.
   c) Sind die Gruppen P_8 und P_5 isomorph ?
   d) Wieviele Elemente in $Z_8 \times Z_5$ haben ein multiplikatives Inverses ? Bildet diese Teilmenge eine multiplikative Gruppe ?
   e) Geben Sie eine ebene Figur an, deren Symmetriegruppe isomorph ist zu P_8 .

3. r sei ein nicht-kommutativer Ring, r* sei die Menge aller Elemente in r , welche ein multiplikatives Inverses besitzen. Zeigen Sie:
   a) $a \in r^*$ und $b \in r^* \implies a \cdot b \in r^*$
   b) r^* ist eine Gruppe

4. Warum bilden die komplexen Zahlen z mit $|z| = 1$ keinen Körper ?

5. Berechnen Sie die inverse Matrix zu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ in $M^{2x2}(Z_5)$.

   Dazu ein kleiner Tip: In Z_5 gilt $\frac{3}{4} = 3 \cdot 4^{-1} = 3 \cdot 4 = 2$

* * * * * * * * * * *

Übrigens gibt es drei Sorten von Mathematikern: Solche, die bis drei zählen können, und solche, die das nicht können.