(1) Geben Sie
a) ein Beispiel für eine nicht-kommutative Gruppe mit 12 Elementen
b) ein Beispiel für einen Körper mit 11 Elementen
c) zwei Beispiele für einen Ring mit 10 Elementen
d) zwei Beispiele für einen Vektorraum mit 9 Elementen
e) ein Beispiel für einen nicht-kommutativen Ring
f) ein Beispiel für einen Vektorraum, in welchem für alle Vektoren $\vec{v}$ gilt $\vec{v} + \vec{v} + \vec{v} = \vec{0}$

(2) Bestimmen Sie alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}^{2\times 2}(\mathbb{Z}_5)$.

Alle Vielfachen eines Vektors $\neq \vec{0}$ bilden in jedem Vektorraum eine 'Gerade'. Was ist noch speziell an diesen Geraden? Vergleichen Sie mit dem Standard-Vektorraum $\mathbb{R}$ (euklid. Raum).

(3) Wir rechnen in $SMQ_3(\mathbb{Z}_7)$. Gegeben sind 5 Vektoren:

$$P = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix} \; ; \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 5 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{sowie}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \; ; \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 1 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Prüfen Sie, ob wirklich $P \in SMQ_3(\mathbb{Z}_7)$ gilt.
b) Berechnen Sie $P + Q$ sowie $3 \cdot P$
c) Berechnen Sie trainingshalber auch $P \cdot Q$
d) Bestimmen Sie Zahlen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}_7$ so, dass gilt

$$P = \alpha \cdot A + \beta \cdot B + \gamma \cdot C$$

*   *   *   *   *

Treffen sich zwei Geraden. Sagt die eine: "Beim nächsten Mal gibst Du einen aus!"