6 Lineare Abbildungen der euklidischen Ebene

In diesem Kapitel betrachten wir nur noch lineare Abbildungen der euklidischen Ebene auf sich selber:

$$f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \quad \text{oder} \quad f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

Zudem verwenden wir das Skalarprodukt von Vektoren, insbesondere die Tatsache, dass zwei Vektoren senkrecht stehen, wenn ihr Skalarprodukt den Wert null hat.

Leonhard Euler (1707 – 1783) hat gezeigt, dass es bei jeder linearen Abbildung f der Ebene ein Paar von Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ gibt mit den folgenden Eigenschaften:

i) $\vec{u} \perp \vec{v}$, also $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

ii) $f(\vec{u}) \perp f(\vec{v})$, also $f(\vec{u}) \cdot f(\vec{v}) = 0$

iii) Über der Basis $f(\vec{u})$, $f(\vec{v})$ besitzt f die Darstellungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Jede lineare Abbildung ist also die Zusammensetzung einer Rotation und einer *Euler-Streckung*!

Zeigen Sie, dass daraus die folgenden Aussagen hervorgehen:

i) $\det(f) = \lambda_1 \cdot \lambda_2$

ii) $\operatorname{spur}(f) = (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \cos\varphi$

iii) $\operatorname{rang}(f) =$ Anzahl der λ_i, die von null verschieden sind

Wir beweisen die Behauptung von Euler in mehren Schritten.

Lemma 6.1. Jede Matrix $A \in \mathbb{M}^{2\times 2}(\mathbb{R})$ lässt sich als Produkt einer symmetrischen Matrix B und einer Rotation C schreiben:

$$A = \begin{pmatrix} f & g \\ h & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & -e \\ e & d \end{pmatrix}$$

mit $d^2 + e^2 = 1$ und $e > 0$.

Beweis: Der Beweis ist konstruktiv, wir zeigen, wie man a, b, c, d und e aus den gegebenen Werten f, g, h und k berechnen kann.

Wäre $g = h$, dann wären wir schon fertig! Es sei also im Folgenden $g \neq h$. Aus den Regeln der Matrix-Multiplikation ergeben sich die folgenden vier Gleichungen:

I	$a \cdot d + b \cdot e = f$
II	$a \cdot (-e) + b \cdot d = g$
III	$b \cdot d + c \cdot e = h$
IV	$b \cdot (-e) + c \cdot d = k$

Zudem verlangen wir noch

V	$d^2 + e^2 = 1$
VI	$e > 0$

Wir berechnen zuerst e und d:

I + IV	$a \cdot d + c \cdot d = f + k$, also $d \cdot (a + c) = f + k$
III - II	$a \cdot e + c \cdot e = h - g$, also $e \cdot (a + c) = h - g$

Wegen $g \neq h$ folgt $e \neq 0$ und $(a + c) \neq 0$. Wir dürfen also die beiden Gleichungen durcheinander dividieren:

$$\frac{d}{e} = \frac{f+k}{h-g} \quad \text{oder} \quad d = e \cdot \frac{f+k}{h-g}$$

quadriert:

$$d^2 = e^2 \cdot \left(\frac{f+k}{h-g}\right)^2 \stackrel{!}{=} 1 - e^2 \quad \text{wegen V}$$

also

$$1 = e^2 \cdot \left(1 + \frac{(f+k)^2}{(h-g)^2}\right)$$

Wegen $e > 0$ folgt

$$e = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(f+k)^2}{(h-g)^2}}} = \sqrt{\frac{(h-g)^2}{(h-g)^2 + (f+k)^2}}$$

Daraus erhalten wir auch den Wert von $d = e \cdot \dfrac{f+k}{h-g}$.

Damit ist die Matrix $C = \begin{pmatrix} d & -e \\ e & d \end{pmatrix}$ bestimmt mit $A = B \cdot C$.

Nun multiplizieren wir noch von rechts mit C^{-1}, um B zu bestimmen!

Es ist $C^{-1} = \begin{pmatrix} d & e \\ -e & d \end{pmatrix}$, somit

$$B = A \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} f & g \\ h & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & e \\ -e & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \cdot d - g \cdot e & f \cdot e + g \cdot d \\ h \cdot d - e \cdot k & h \cdot e + k \cdot d \end{pmatrix}$$

Ist diese Matrix B symmetrisch?

Gilt $h \cdot d - e \cdot k = f \cdot e + g \cdot d$?

Gilt $h \cdot d - g \cdot d = f \cdot e + e \cdot k$?

Gilt $d \cdot (h - g) = e \cdot (f + k)$?

Ja, denn $\dfrac{d}{e} = \dfrac{f+k}{h-g}$! $\square$

Satz 6.2. Jede symmetrische Matrix $A \in \mathbb{M}^{2\times 2}(\mathbb{R})$ ist diagonalisierbar. Sie besitzt also zwei linear unabhängige Eigenvektoren.

Beweis: Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.

Ist $b = 0$, so sind wir fertig. Sei also $b \neq 0$: Wir zeigen, dass A zwei verschiedene Eigenwerte besitzt. Dann sind wir nach Lemma 5.4 fertig.

Das charakteristische Polynom von A ist

$$(a - \lambda) \cdot (c - \lambda) - b^2 = \lambda^2 - (a + c) \cdot \lambda + a \cdot c - b^2$$

Dieser quadratische Term hat genau dann zwei Nullstellen, wenn die Diskriminante D positiv ist:

$$\begin{aligned} D &= (a + c)^2 - 4 \cdot (a \cdot c - b^2) = a^2 + 2 \cdot a \cdot c + c^2 - 4 \cdot a \cdot c + 4 \cdot b^2 \\ &= a^2 - 2 \cdot a \cdot c + c^2 + 4 \cdot b^2 = (a - c)^2 + 4 \cdot b^2 \end{aligned}$$

Wegen $b \neq 0$ ist dieser Term sicher positiv. □

Lemma 6.3. Die symmetrische Matrix $A \in \mathbb{M}^{2\times 2}(\mathbb{R})$ habe die beiden Eigenvektoren λ_1 und λ_2. Dann sind die folgenden Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ zugehörige Eigenvektoren:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} a - \lambda_2 \\ b \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} a - \lambda_1 \\ b \end{pmatrix}, \text{ wenn } A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Beweis: Wir müssen zeigen

i) $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a - \lambda_2 \\ b \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} a - \lambda_2 \\ b \end{pmatrix}$

ii) $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a - \lambda_1 \\ b \end{pmatrix} = \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} a - \lambda_1 \\ b \end{pmatrix}$

Wir zeigen nur die Gültigkeit von i), ii) geht genauso. i) ist bewiesen, wenn gilt

$$\begin{array}{ll} \text{I} & a^2 - a \cdot \lambda_2 + b^2 = a \cdot \lambda_1 - \lambda_1 \cdot \lambda_2 \\ \text{II} & a \cdot b - b \cdot \lambda_2 + c \cdot b = b \cdot \lambda_1 \end{array}$$

Die symmetrische Matrix A ist nach Satz 6.2 diagonalisierbar. Daher dürfen wir auch das Korollar 5.11 verwenden:

$$\operatorname{spur}(A) = a + c = \lambda_1 + \lambda_2 \quad \text{und} \quad \det(A) = a \cdot c - b^2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2$$

Somit

$$\begin{array}{ll} \text{I} & a^2 - a \cdot (a + c - \lambda_1) + b^2 \overset{?}{=} a \cdot \lambda_1 - (a \cdot c - b^2) \\ & a^2 - a^2 - a \cdot c + a \cdot \lambda_1 + b^2 \overset{!}{=} a \cdot \lambda_1 + b^2 - a \cdot c \\ \text{II} & b \cdot a - b \cdot \lambda_2 + b \cdot c \overset{?}{=} b \cdot (a + c - \lambda_2) \\ & b \cdot (a - \lambda_2 + c) \overset{!}{=} b \cdot (a + c - \lambda_2) \end{array}$$

□

Lemma 6.4. Die beiden Eigenvektoren von Lemma 6.3 stehen senkrecht aufeinander.

Beweis:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a-\lambda_1 \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a-\lambda_2 \\ b \end{pmatrix} &= a^2 - a\cdot\lambda_1 - a\cdot\lambda_2 + \lambda_1\cdot\lambda_2 + b^2 = a^2 + b^2 - a\cdot(\lambda_1+\lambda_2) + \lambda_1\cdot\lambda_2 \\ &\overset{!}{=} a^2 + b^2 - a\cdot \mathrm{spur}(A) + \det(A) = a^2 + b^2 - a\cdot(a+c) + a\cdot c - b^2 \\ &= a^2 + b^2 - a^2 - a\cdot c + a\cdot c - b^2 = 0 \end{aligned}$$

□

Korollar 6.5. (Satz von Euler) Jede lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ lässt sich zusammensetzen aus einer Drehung d und einer Euler-Streckung $euler$. Dabei gibt es immer zwei senkrechte Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$, die auf zwei senkrechte Bildvektoren $f(\vec{u})$ und $f(\vec{v})$ abgebildet werden. Über den Basisvektoren $d(\vec{u})$ und $d(\vec{v})$ kann $f = euler \circ d$ geschrieben werden als

$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Beweis: Lemma 6.1, Satz 6.2, Lemma 6.3 und Lemma 6.4. □

Korollar 6.6. Jede lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ bildet einen Kreis um (0/0) auf eine Ellipse mit Mittelpunkt (0/0) ab. Die Halbachsen der Ellipse können auch 0 werden, falls $\det(f) = 0$.

Korollar 6.7. Bei jeder linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gibt es ein Quadrat, welches auf ein Rechteck abgebildet wird. Dieses kann auch zu einer Strecke oder dem Nullpunkt degenerien, falls $\det(f) = 0$ ist.

Korollar 6.8. Jede lineare Abbildung $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ mit $\det(f) \neq 0$ bildet Ellipsen mit Mittelpunkt in (0/0) auf Ellipsen mit Mittelpunkt in (0/0) ab.

Beweis: $f(\text{Ellipse}) = f(g(\text{Kreis})) = f \circ g(\text{Kreis}) = \text{Ellipse}$. □

Es folgt eine ausgewachsene

Beipielaufgabe

Es sei $A = \begin{pmatrix} -13.6 & -40.2 \\ -10.2 & 53.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & g \\ h & k \end{pmatrix}$.

Gesucht sind

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \text{ und } C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -e \\ e & d \end{pmatrix},$$

sodass gilt $A = B \cdot C$.

Zudem wollen wir die senkrechten Vektoren kennen, welche von der Rotation C auf die beiden senkrechten Eigenvektoren von B abgebildet werden.

Nach dem Beweis von Lemma 6.1 gilt

$$e = \sqrt{\frac{(h-g)^2}{(h-g)^2 + (f+k)^2}} = \sqrt{\frac{30^2}{30^2+40^2}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5} = 0.6$$

$$d = e \cdot \frac{f+k}{h-g} = e \cdot \frac{40}{30} = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{5} = 0.8$$

Somit $C = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.6 \\ 0.6 & 0.8 \end{pmatrix}$, $\quad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{0.6}{0.8}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) \approx 36.87°$

$$A = B \cdot C \implies A \cdot C^{-1} = B \cdot C \cdot C^{-1} = B,$$

also

$$B = A \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} -13.6 & -40.2 \\ -10.2 & 53.6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 \\ -0.6 & 0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13.24 & -40.32 \\ -40.32 & 36.76 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte von B sind $\dfrac{(a+c) \pm \sqrt{D}}{2}$, wo $D = (a-c)^2 + 4 \cdot b^2$.

Der TR liefert uns $\lambda_1 = 67$ und $\lambda_2 = -17$. Dazu erhalten wir die beiden Eigenvektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} a - \lambda_2 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13.24 + 17 \\ -40.32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30.24 \\ -40.32 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} a - \lambda_1 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13.24 - 67 \\ -40.32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -53.76 \\ -40.32 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Welche beiden senkrechten Vektoren werden von der Rotation C auf $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ abgebildet?

$$C^{-1} \cdot \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 \\ -0.6 & 0.8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} = \vec{u}$$

$$C^{-1} \cdot \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 \\ -0.6 & 0.8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{v}$$

Jetzt wissen wir alles über diese lineare Abbildung:

- die Vektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ werden von der Rotation C auf die ebenfalls senkrechten Vektoren $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ abgebildet
- die Euler-Streckung streckt dann $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ mit dem Faktor 67 und $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit dem Faktor -17
- der Einheitskreis wird auf eine Ellipse mit den Halbachsen 67 und 17 abgebildet
- die Fläche nimmt dabei um den Faktor $67 \cdot 17 = 1139$ zu. Es ist $\det(A) = -1139 \ldots$

Weiter:

- das Quadrat mit den Ecken (0/0), $(0/-5)$, $(5/-5)$ und (5/0) wird auf das Rechteck mit den Ecken (0/0), $(201/-268)$, $(133/-319)$ und $(-68/-51)$ abgebildet.

  $l = \sqrt{201^2 + 268^2} = 335 = 5 \cdot 67, \quad b = \sqrt{68^2 + 51^2} = 85 = 5 \cdot 17\,!$
- Quadrate mit einer Ecke in (0/0), deren Ecken nicht parallel sind zur x- und y-Achse werden auf ein schiefes Parallelogramm abgebildet.

Zum Abschluss wie immer noch ein paar

Aufgaben

1. Zeigen Sie: Ist $\det(A) \neq 0$, so kann A keinen Eigenwert mit dem Wert 0 haben.

2. Welche symmetrischen Matrizen haben genau einen Eigenwert?

3. Nach dem Satz 6.2 ist jede symmetrische Matrix ähnlich zu einer Diagonalmatrix. Es gibt immer eine Rotation B, sodass gilt: $B \cdot A \cdot B^{-1}$ ist eine Diagonalmatrix. Bestimmen Sie für die folgenden symmetrischen Matrizen diese Rotation B, den Drehwinkel φ sowie die Diagonalmatrix $D = B \cdot A \cdot B^{-1}$:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 5.2 \end{pmatrix}$ d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

4. Zerlegen Sie die Abbildung

$$x' = 4 \cdot x + 2 \cdot y$$
$$y' = x - 2 \cdot y$$

in eine Rotation und eine Euler-Streckung. Welche beiden rechtwinkligen Vektoren werden dabei wieder auf ein Paar rechtwinkliger Vektoren abgebildet?

5. Bestimmen Sie die „invarianten rechten Winkel" bei den folgenden beiden Abbildungen:

a) $x' = x + 1.5 \cdot y$, $y' = y$ b) $x' = 2 \cdot x + 3 \cdot y$, $y' = 3 \cdot x + 4 \cdot y$

6. Zeigen Sie, dass die beiden Abbildungsgleichungen eine Geradenspiegelung beschreiben und bestimmen Sie die Gleichung der Spiegelachse:

$$x' = 0.6 \cdot x - 0.8 \cdot y$$
$$y' = -0.8 \cdot x - 0.6 \cdot y$$

7. Stellen Sie allgemein die Gleichungen auf für die Spiegelung an der Geraden $y = m \cdot x$.

8. Ist eine lineare Abbildung der Ebene mit den beiden Eigenwerten 1 und -1 immer eine Geradenspiegelung?

Dann stellen sich noch die grossen Fragen:

9. Welche Ergebnisse dieses Kapitels lassen sich auf Endomorphismen des Raumes (oder von $\mathbb{R}^3$) übertragen?

Wie sehen überhaupt die Rotationen des Raumes aus?

Wird jede Kugel mit Mittelpunkt (0/0/0) auf ein Ellipsoid mit Mittelpunkt (0/0/0) abgebildet?

10. Welche Ergebnisse lassen sich auf Endomorphismen im $\mathbb{R}^n$ verallgemeinern?

Lässt sich jede Matrix $A \in \mathbb{M}^{n\times n}(\mathbb{R})$ als Produkt einer symmetrischen Matrix B und einer antisysmmetrischen Matrix C schreiben?

Ist jede symmetrische Matrix diagonalisierbar?

Solche und ähnliche Fragen zu untersuchen bedeutet nichts anders als Mathematik zu betreiben!

Version 1.1, vom März 2015

Ausgearbeitet von Martin Gubler, Kantonsschule Frauenfeld, im November 2014

Mit LaTeX in eine lesbare Form gebracht von Alfred Hepp, Bergün im März 2015