

# Von Kepler zu Hamilton und Newton

---

Eine sehr elegante Variante von „3 Kepler ergeben 1 Newton“

1. Das erste Kepler'sche Gesetz
2. Das zweite Kepler'sche Gesetz
3. Die Bahngeschwindigkeit  $\vec{v}$  und der Hodograph
4. Die Beschleunigung  $\vec{a}$
5. Das dritte Kepler'sche Gesetz
6. Von der Beschleunigung zur Kraft

$$\frac{d\vec{v}}{d\varphi} = \frac{2 \cdot c}{\rho} \cdot \begin{pmatrix} -\cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{pmatrix}$$

Version 1.1 vom August 2017

Ausgearbeitet von Martin Gubler, Kantonsschule Frauenfeld, im Juli 2017

Mit L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X schön gesetzt von Alfred Hepp, Bergün, im August 2017

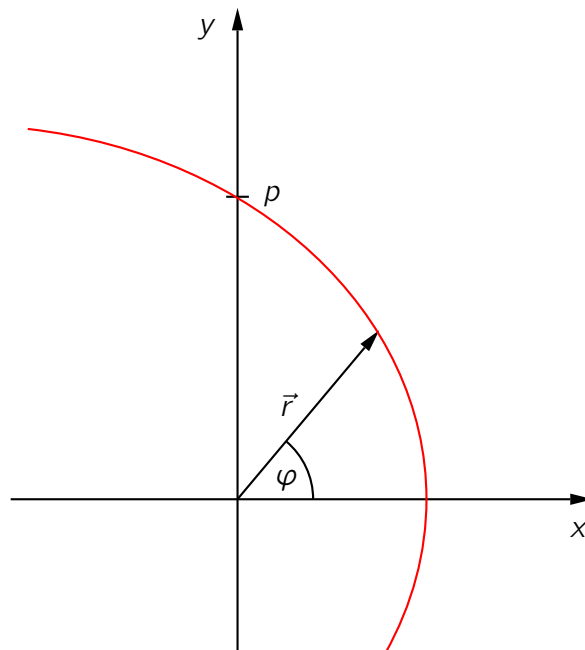
# 1 Das erste Kepler'sche Gesetz

**K1:** „Die Bahnen der Planeten sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.“

Die folgende mathematische Formulierung lässt auch Parabeln und Hyperbeläste als Bahnform zu:

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cdot \cos \varphi} \quad (1)$$

Das ist die Gleichung eines Kegelschnittes in Polarform. Im Nullpunkt des Koordinatensystems steht dabei die Sonne.



Wir leiten (1) nach  $\varphi$  ab und erhalten

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{p \cdot \varepsilon \cdot \sin \varphi}{(1 + \varepsilon \cdot \cos \varphi)^2} = \frac{\varepsilon}{p} \cdot r^2 \cdot \sin \varphi \quad (2)$$

Für den Ortsvektor  $\vec{r}$  gilt

$$\vec{r} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (3)$$

Die Ableitung von (3) nach  $\varphi$  liefert mit (2) und der Produktregel

$$\frac{d\vec{r}}{d\varphi} = \frac{\varepsilon}{p} \cdot r^2 \cdot \sin \varphi \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (4)$$

Soviel zum Ortsvektor  $\vec{r}$ .

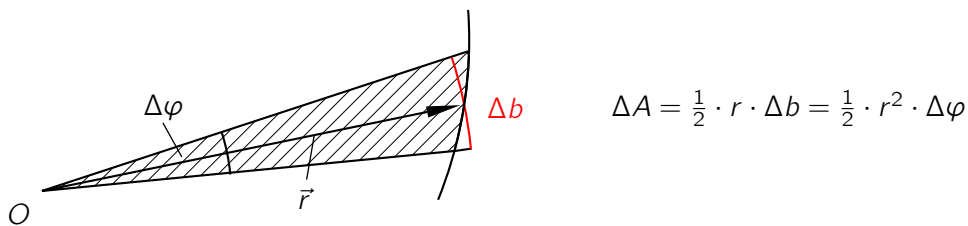
## 2 Das zweite Kepler'sche Gesetz

**K2:** „Der Fahrstrahl des Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.“

Für den Mathematiker bedeutet das

$$\frac{dA}{dt} = c = \text{konstant} \quad (5)$$

Der Fahrstrahl ist dabei nichts anderes als der Ortsvektor  $\vec{r}$  des Planeten. Die vom Fahrstrahl überstrichene Fläche bezeichnen wir mit  $A$ . Sie ist in der folgenden Figur schraffiert hervorgehoben:



Mit der Kettenregel folgt aus (5)

$$c = \frac{dA}{dt} = \frac{dA}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

Daraus gewinnen wir die Gleichung, die im Folgenden eine zentrale Stellung haben wird:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2 \cdot c}{r^2} \quad (6)$$

Jede Ableitung nach der Zeit werden wir mit der Kettenregel zuerst als Ableitung nach  $\varphi$  ausführen, um anschliessend noch mit der rechten Seite von (6) zu multiplizieren. Alle Rechnungen werden dadurch viel einfacher als beispielsweise im Skriptum Kepler\_03.pdf.

Die Anregung zu diesem Vorgehen entstammt der schönen Arbeit von Erich Ch. Wittmann: „Von den Hüllkurvenkonstruktionen der Kegelschnitte zu den Planetenbahnen“, erschienen in den ‚Mathematischen Semesterberichten‘ (2015) 62: p.17-35, Springer Verlag.

### 3 Die Bahngeschwindigkeit $\vec{v}$ und der Hodograph

Mit (6) gilt für die Geschwindigkeit  $\vec{v}$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{2 \cdot c}{r^2} \cdot \frac{d\vec{r}}{d\varphi}$$

Mit (4), (1) und dem trigonometrischen Pythagoras erhalten wir daraus

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{2 \cdot c}{\rho} \cdot \varepsilon \cdot \sin \varphi \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} + \frac{2 \cdot c}{r} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \\ &= \frac{2 \cdot c}{\rho} \cdot \varepsilon \cdot \sin \varphi \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} + \frac{2 \cdot c}{\rho} \cdot (1 + \varepsilon \cdot \cos \varphi) \cdot \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \\ &= \frac{2 \cdot c}{\rho} \cdot \varepsilon \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2 \cdot c}{\rho} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7)$$

Wir setzen

$$\rho = \frac{2 \cdot c}{\rho} \quad \text{und} \quad h = \frac{2 \cdot c}{\rho} \cdot \varepsilon = \rho \cdot \varepsilon \quad (8)$$

Damit schreibt sich (7) als

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} + \rho \cdot \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (9)$$

Das ist die Gleichung eines Kreises mit Mittelpunkt  $(0/h)$  und Radius  $\rho$ ! Wir haben fast beiläufig erhalten, dass der Hodograph der Bahn kreisförmig ist, wenn die Bahnform einen Kegelschnitt darstellt und wenn Keplers Flächensatz gilt. Das folgt also schon allein aus **K1** und **K2**.

Im Abschnitt 7 von Kepler\_10.pdf sind die Hodographen für die drei Fälle  $\varepsilon < 1$  (Ellipse),  $\varepsilon = 1$  (Parabel) und  $\varepsilon > 1$  (Hyperbel) gezeichnet.

Im nächsten Abschnitt benötigen wir noch die Ableitung von  $\vec{v}$  nach  $\varphi$ . Aus (7) erhalten wir sofort

$$\frac{d\vec{v}}{d\varphi} = \frac{2 \cdot c}{\rho} \cdot \begin{pmatrix} -\cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{pmatrix} \quad (10)$$

## 4 Die Beschleunigung $\vec{a}$

Wir vermeiden wieder die Ableitung nach der Zeit. Mit der Kettenregel erhalten wir aus (6) und (10) sofort

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{2 \cdot c}{p} \cdot \begin{pmatrix} -\cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{pmatrix} \cdot \frac{2 \cdot c}{r^2}$$

also

$$\vec{a} = \frac{4 \cdot c^2}{p} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \begin{pmatrix} -\cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{pmatrix} = -\frac{4 \cdot c^2}{p} \cdot \frac{1}{r^3} \cdot \vec{r} \quad (11)$$

$\vec{a}$  ist also antiparallel zu  $\vec{r}$ , die Beschleunigung zeigt immer zum Nullpunkt des Koordinatensystems und somit zur Sonne. Die wirkende Kraft ist eine Zentralkraft.

Für den Betrag von  $\vec{a}$  gilt

$$|\vec{a}| = \frac{4 \cdot c^2}{p} \cdot \frac{1}{r^2} \quad (12)$$

Die Werte von  $c$  und  $p$  sind aber für jeden Planeten anders. Der Betrag der Zentralkraft nimmt nur dann für *alle* Planeten mit  $k \cdot \frac{1}{r^2}$  ab, wenn der Term  $\frac{4 \cdot c^2}{p}$  für alle Planeten denselben Wert annimmt. Genau das ist aber die Aussage des dritten Kepler'schen Gesetzes !

## 5 Das dritte Kepler'sche Gesetz

**K3:** „Die Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie die Kuben der grossen Halbachsen.“

Wenn wir (5) über eine ganze Umlaufzeit  $T$  integrieren erhalten wir die Fläche der Ellipse:

$$c \cdot T = \pi \cdot a \cdot b$$

$a$  und  $b$  sind dabei die beiden Halbachsen der vom Planeten beschriebenen Ellipse. Wir quadrieren:

$$c^2 \cdot T^2 = \pi^2 \cdot a^2 \cdot b^2$$

Mit  $b^2 = a \cdot p$  erhalten wir daraus

$$c^2 \cdot T^2 = \pi^2 \cdot a^3 \cdot p$$

und weiter

$$\frac{4 \cdot c^2}{p} \cdot T^2 = 4 \cdot \pi^2 \cdot a^3$$

Aus **K3** folgt nun, dass der Term  $\frac{4 \cdot c^2}{p}$  für alle Planeten denselben Wert annehmen muss.

Für alle Planeten gilt also

$$|\vec{a}| = \frac{4 \cdot c^2}{p} \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{k}{r^2} \quad (13)$$

Die Konstante  $k$  hat dabei für alle Planeten denselben Wert.

## 6 Von der Beschleunigung zur Kraft

Wir wissen nun, dass jeder Planet eine Beschleunigung gegen den Nullpunkt des Koordinatensystems erfährt vom Betrag

$$|\vec{a}| = \frac{k}{r^2}$$

wo  $k$  eine allgemeine Konstante ist. Zwei weitere Schritte führen von dieser Feststellung zum Gravitationsgesetz von Newton:

Erstens muss der Begriff der Kraft *definiert* werden. Wir verwenden hier die einfache Variante

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Die Kraft, die auf einen Planeten wirkt, ist gleich dem Produkt seiner Masse und seiner Beschleunigung.

Zweitens kommt Newtons Wechselwirkungsgesetz zum Zuge: *actio = reactio*. Diese tieferschürfende Erkenntnis bedingt, dass auch die Masse der Sonne in den Ausdruck für die gegenseitige Anziehungskraft eingeht. Zudem erzwingt sie eine Verfeinerung der Betrachtung, da sich auch die Sonne um den gemeinsamen Schwerpunkt des Systems Sonne - Planet bewegen muss. Eine detaillierte Untersuchung (z.B. gemäss Kepler\_01.pdf, Abschnitte 10 bis 12) zeigt, dass sich daraus eine kleine Korrektur für **K3** herleitet.

Wir erhalten nun das Gravitationsgesetz von Newton:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{k}{r^2} \cdot \frac{-\vec{r}}{r} = m \cdot \frac{G \cdot M}{r^2} \cdot \frac{-\vec{r}}{r} = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \cdot \frac{-\vec{r}}{r} \quad (14)$$

Für jeden Planeten gilt

$$\frac{4 \cdot c^2}{\rho} = k = G \cdot M \quad (15)$$

wo  $G$  die universelle Gravitationskonstante und  $M$  die Masse der Sonne bezeichnet.

Schon Kepler hat sich eine allgemeine Anziehungskraft zwischen Massen vorgestellt. Im Vorwort zu seiner „Neuen Astronomie“ schreibt er:

„Wenn man zwei Steine an einen beliebigen Ort der Welt versetzen würde, nahe beieinander ausserhalb des Kraftbereichs eines dritten verwandten Körpers, dann würden sich jene Steine ähnlich wie zwei magnetische Körper an einem zwischenliegenden Ort vereinigen, wobei sich der eine dem anderen um eine Strecke nähert, die der Masse des anderen proportional ist.“

Die gegenseitige Anziehung von Erde und Mond war für ihn eine Tatsache, und er führt auch das Phänomen von Ebbe und Flut darauf zurück.

Newton ist wirklich auf den Schultern von Riesen gestanden.